

Lekcja 1. Podstawowe prawa obwodów elektrycznych

Wstęp

Lekcja pierwsza wprowadza podstawowe pojęcia i prawa obwodów elektrycznych, w tym prąd i napięcie, elementy liniowe obwodu w postaci rezystora, cewki i kondensatora oraz źródła sterowane i niezależne. Najważniejszym prawem teorii obwodów jest prawo prądowe i napięciowe Kirchhoffa, podane tutaj w postaci ogólnej. Z prawa Kirchhoffa wynikają reguły upraszczania obwodów, zdefiniowane dla połączenia szeregowego, równoległego oraz transfiguracji gwiazda-trójkąt i trójkąt-gwiazda.



1.1. Podstawowe pojęcia obwodów

Teoria obwodów stanowi jedną z dziedzin elektrotechniki zajmującą się stroną teoretyczną zjawisk występujących w obwodach elektrycznych, w tym metodami analizy rozptywu prądów i rozkładu napięć obwodu w stanie ustalonym i nieustalonym. Przyjmuje się, że nośnikami elektryczności są cząstki elementarne: elektrony i protony występujące w atomie. W przypadku przewodników elektrycznych najważniejszą rolę odgrywają elektrony swobodne, stanowiące trwałe nośniki ujemnego ładunku q , wyzwolone z przyciągania jądra atomu oraz jony, stanowiące cząsteczki naładowane dodatnio lub ujemnie. Ładunek elektryczny elektronu, oznaczany jest literą e a jego wartość $e=1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$.

Prąd elektryczny powstaje jako uporządkowany ruch ładunków elektrycznych i jest utożsamiany w teorii obwodów z pojęciem natężenia prądu elektrycznego. W ogólności definiowany jest jako granica stosunku ładunku elektrycznego przepływającego przez przekrój poprzeczny elementu do rozpatrywanego czasu, gdy czas ten dąży do zera. Prąd elektryczny oznaczany będzie literą i (dużą lub małą). Jest wielkością skalarną a jej jednostką w układzie SI jest **amper** (A).

Każdemu punktowi w środowisku przewodzącym prąd elektryczny można przyporządkować pewien potencjał mierzony względem punktu odniesienia. Różnica potencjałów między dwoma punktami tego środowiska nazywana jest **napięciem elektrycznym**. Jednostką napięcia elektrycznego jest **volt** (V).

1.2. Elementy obwodu elektrycznego

Za **obwód elektryczny** uważać będziemy takie połączenie elementów ze sobą, że istnieje możliwość przepływu prądu w tym połączeniu. Obwód jest odwzorowywany poprzez swój schemat, na którym zaznaczone są symbole graficzne elementów oraz sposób ich połączenia ze sobą, tworzący określoną strukturę.

Na strukturę obwodu elektrycznego poza elementami składają się również gałęzie, węzły i oczka. **Gałąź** obwodu jest tworzona przez jeden lub kilka elementów połączonych ze sobą w określony sposób. **Węzeł** obwodu jest zacisk będący końcówką gałęzi, do którego można dołączyć następną gałąź lub kilka gałęzi. Gałąź obwodu tworzą elementy ograniczone dwoma węzłami. **Oczko** obwodu to zbiór gałęzi połączonych ze sobą i tworzących drogę zamkniętą dla prądu elektrycznego. Oczko ma tę właściwość, że po usunięciu dowolnej gałęzi ze zbioru pozostałe gałęzie nie tworzą drogi zamkniętej. W obwodzie o zadanej strukturze istnieje ściśle określona liczba węzłów, natomiast liczba oczek jest wprawdzie skończona ale bliżej nieokreślona.

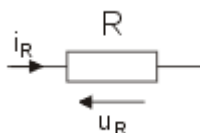
Element jest częścią składową obwodu niepodzielną pod względem funkcjonalnym bez utraty swych cech charakterystycznych. Na elementy obwodu składają się źródła energii elektrycznej oraz elementy akumulujące energię lub rozpraszające ją. W każdym elemencie mogą zachodzić dwa lub nawet wszystkie trzy wymienione tu procesy, choć jeden z nich jest zwykle dominujący. Element jest idealny jeśli charakteryzuje go tylko jeden rodzaj procesu energetycznego.

Elementy posiadające zdolność akumulacji oraz rozpraszania energii tworzą klasę **elementów pasywnych**. Nie wytwarzają one energii a jedynie ją przetwarzają. Najważniejsze z nich to **rezystor**, **kondensator** oraz **cewka**. Elementy mające zdolność generacji energii nazywane są **źródłami**. Zaliczamy do nich **niezależne źródło napięcia i prądu** oraz **źródła sterowane**.

Każdy element obwodu może być opisany równaniami algebraicznymi lub różniczkowymi, wiążącymi prąd i napięcie na jego zaciskach. **Element** jest **liniowy**, jeśli równanie opisujące go jest liniowe. W przeciwnym wypadku element jest **nieliniowy**.

1.2.1. Rezystor

Rezystor, zwany również opornikiem należy do klasy elementów pasywnych rozpraszających energię. W teorii obwodów rezystor uważa się za element idealny i przypisuje mu tylko jedną cechę (parametr), zwaną **rezystancją** lub oporem. W dalszej części rozważać będziemy wyłącznie rezystor liniowy. Rezystancję (oporność) oznaczać będziemy literą R a jej odwrotność jest nazywana **konduktancją** i oznaczana literą G , przy czym $R = 1/G$. Symbol graficzny rezystora liniowego przedstawiony jest na rys. 1.1.



Rys. 1.1. Oznaczenie rezystora liniowego

Opis matematyczny rezystora wynika z prawa Ohma, zgodnie z którym

$$u_R = Ri_R \quad (0.1)$$

Spadek napięcia na rezystorze liniowym jest proporcjonalny do prądu przepływającego przez niego a współczynnik proporcjonalności jest równy rezystancji R . Wartość rezystancji rezystora liniowego przyjmuje wartość stałą. Jednostką rezystancji jest **om** (Ω) a konduktancji **siemens** (S).

W realizacji praktycznej opornik jest wykonywany najczęściej z drutu metalowego o długości l , polu przekroju poprzecznego S i rezystancji właściwej ρ . Rezystancja takiego opornika jest wprost proporcjonalna do l i ρ a odwrotnie proporcjonalna do S , stąd $R = \rho l / S$.

1.2.2. Cewka

Cewka zwana również induktorem należy również do klasy elementów pasywnych. Ma zdolność gromadzenia energii w polu magnetycznym. Cewce idealnej przypisuje się tylko jedną właściwość, zwaną **indukcyjnością** własną (w skrócie indukcyjnością) L . W przypadku cewki liniowej indukcyjność definiuje się jako stosunek strumienia Ψ skojarzonego z cewką do prądu płynącego przez nią, to znaczy

$$L = \frac{\Psi}{i_L} \quad (0.2)$$

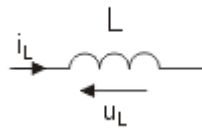
Strumień skojarzony Ψ cewki o z zwojach jest równy sumie strumieni wszystkich zwojów cewki, to jest $\Psi = z\phi$ (ϕ - strumień skojarzony z jednym zwojem cewki, z – liczba zwojów). Jednostką indukcyjności jest **henr** (H), przy czym $1\text{H} = 1\Omega\text{s}$. Napięcie cewki wyrażone jest jako pochodna strumienia względem czasu

$$u_L = \frac{d\Psi}{dt} \quad (0.3)$$

W przypadku cewki liniowej, dla której strumień jest iloczynem prądu i indukcyjności L , $\Psi = Li_L$, relacja napięciowo-prądowa upraszcza się do postaci

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (0.4)$$

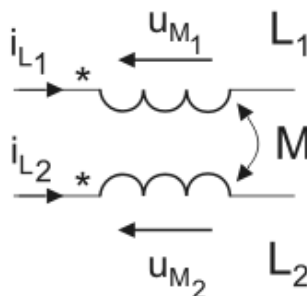
Na rys. 1.2 przedstawiono symbol graficzny cewki liniowej o indukcyjności L .



Rys. 1.2. Symbol graficzny cewki liniowej

Zauważmy, że przy stałej wartości prądu cewki napięcie na niej jest równe zero, gdyż pochodna wartości stałej względem czasu jest równa zero. Stąd cewka w stanie ustalonym obwodu przy prądzie stałym zachowuje się jak zwarcie.

Interesujące zjawiska powstają w układzie dwu cewek położonych blisko siebie, w których zachodzi wzajemne przenikanie się strumieni magnetycznych. Jeśli dwie cewki o indukcyjnościach własnych L_1 i L_2 są tak usytuowane, że strumień wytworzony przez jedną z nich jest skojarzony z drugą to takie cewki nazywamy sprzężonymi magnetycznie. Na rys. 1.3 przedstawiono oznaczenie cewek sprzężonych magnetycznie. Gwiazdkami oznaczono początki uzwojeń każdej cewki.



Rys. 1.3. Oznaczenie cewek sprzężonych magnetycznie

Obok indukcyjności własnej wprowadza się dla nich pojęcie **indukcyjności wzajemnej** M , jako stosunek strumienia magnetycznego wytworzonego w cewce pierwszej i skojarzonego z cewką drugą do prądu płynącego w cewce pierwszej, a więc

$$M = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = \frac{\Psi_{12}}{i_2} \quad (1.5)$$

gdzie Ψ_{21} oznacza strumień skojarzony z cewką drugą wytworzony przez prąd płynący w cewce pierwszej a Ψ_{12} – strumień skojarzony z cewką pierwszą wytworzony przez prąd płynący w cewce drugiej. Jednostką indukcyjności wzajemnej jest również **henr**.

Istnienie sprzężenia magnetycznego powoduje indukowanie się napięć na cewce wskutek zmian prądu płynącego w cewce drugiej. Zgodnie z prawem indukcji elektromagnetycznej napięcie wytworzone na skutek indukcji wzajemnej określone jest wzorem

$$u_{M1} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \quad (1.6)$$

$$u_{M2} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} \quad (1.7)$$

Znak plus lub minus występujący we wzorze jest uzależniony od przyjętego zwrotu prądu względem początku uzwojenia cewki. Przyjmuje się znak plus, jeśli prądy w obu elementach sprzężonych magnetycznie mają jednakowe zwroty względem zacisków oznaczających początek uzwojenia (oznaczone na rysunku gwiazdką). Przy zwrotach przeciwnych przyjmuje się znak minus. Z zależności powyższych widać, że w elementach sprzężonych magnetycznie energia elektryczna może być przekazywana z jednego elementu do drugiego za pośrednictwem pola magnetycznego. Co więcej, nawet przy braku przepływu prądu przez cewkę, może na niej pojawić się napięcie pochodzące ze sprzężenia magnetycznego od cewki drugiej.

1.2.3. Kondensator

Kondensator jest elementem pasywnym, w którym istnieje możliwość gromadzenia energii w polu elektrycznym. Kondensatorowi idealnemu przypisuje się tylko jedną

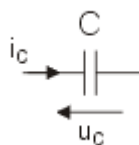
właściwość zwaną **pojemnością** C . W przypadku kondensatora liniowego pojemność C jest definiowana jako stosunek ładunku q zgromadzonego w kondensatorze do napięcia między okładzinami tego kondensatora

$$C = \frac{q}{u_c} \quad (1.8)$$

W układzie SI jednostką ładunku jest **kulomb** (C), a pojemności **farad** (F), przy czym $1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$. Zależność wiążąca napięcie i prąd kondensatora dana jest w postaci równania różniczkowego

$$i_c = C \frac{du_c}{dt} \quad (1.9)$$

Symbol graficzny kondensatora przedstawiony jest na rys. 1.4.

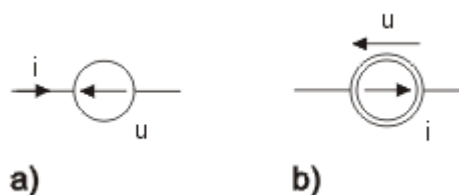


Rys. 1.4. Symbol graficzny kondensatora

Podobnie jak w przypadku cewki, jeśli napięcie na zaciskach kondensatora jest stałe, jego prąd jest równy zeru (pochodna wartości stałej względem czasu jest zerem). Kondensator zachowuje się wtedy jak przerwa (pomimo istnienia napięcia prąd nie płynie).

1.2.4. Niesterowane źródło napięcia i prądu

Źródło niesterowane (niezależne) prądu bądź **napięcia**, zwane w skrócie źródłem prądu i źródłem napięcia, jest elementem aktywnym, generującym energię elektryczną, powstającą zwykle z zamiany innego rodzaju energii, na przykład z energii mechanicznej, słonecznej, jądrowej itp. W teorii obwodów rozważać będziemy źródła idealne należące do klasy źródeł napięciowych bądź prądowych. Symbol idealnego niesterowanego źródła napięcia przedstawiony jest na rys. 1.5a, natomiast źródła prądu na rys. 1.5.b.

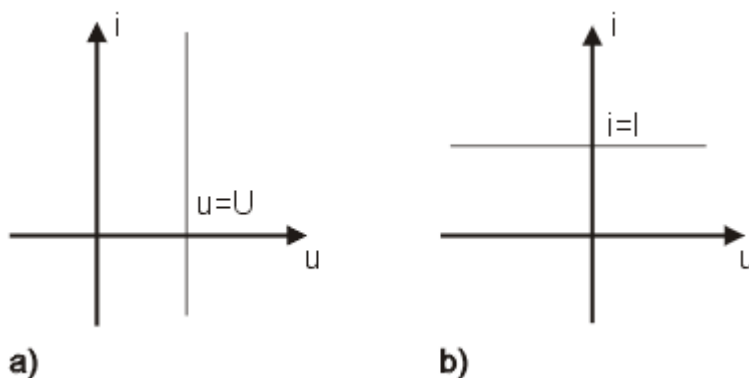


Rys. 1.5. Symbole graficzne niesterowanego źródła a) napięcia, b) prądu

Niesterowane źródła prądu i napięcia mają następujące właściwości.

- Napięcie na zaciskach idealnego źródła napięcia nie zależy od prądu przepływającego przez to źródło, a zatem nie zależy od jego obciążenia.
- Przy stałym napięciu u panującym na zaciskach oraz prądzie i wynikającym z obciążenia, rezystancja wewnętrzna idealnego źródła napięciowego, definiowana w postaci zależności różniczkowej $R_w = \frac{du}{di} = 0$. Stąd idealne źródło napięcia charakteryzuje się rezystancją wewnętrzną równą zero (zwarcie z punktu widzenia rezystancyjnego).
- Prąd idealnego źródła prądu nie zależy od obciążenia tego źródła, a więc od napięcia panującego na jego zaciskach.
- Przy stałym prądzie płynącym przez idealne źródło prądowe i dowolnym (bliżej nieokreślonym) napięciu panującym na jego zaciskach rezystancja wewnętrzna idealnego źródła prądowego jest równa nieskończoności. Stąd idealne źródło prądowe z punktu widzenia rezystancyjnego reprezentuje sobą przerwę.

Rys. 1.6 przedstawia charakterystyki prądowo-napięciowe obu rodzajów idealnych źródeł niesterowanych: napięcia (rys. 1.6a) i prądu (rys. 1.6b).



Rys. 1.6. Charakterystyki prądowo-napięciowe idealnych źródeł niesterowanych:

a) źródło napięcia, b) źródło prądu



Dla źródła napięciowego charakterystyka jest równoległa do osi prądowej (wartość napięcia u stała), a dla źródła prądowego równoległa do osi napięciowej (wartość prądu i stała). Tak podane charakterystyki odnoszą się do źródeł stałych. W przypadku źródeł sinusoidalnych idealność jest rozumiana jako stałość parametrów źródła (amplituda, faza początkowa oraz częstotliwość niezależne od obciążenia).

Przykładami źródła napięcia stałego jest akumulator, źródła napięcia zmiennego - generator synchroniczny, źródła prądowego - elektroniczny zasilacz prądowy o stabilizowanym, niezależnym od obciążenia prądzie, itp.

1.2.5. Źródła sterowane prądu i napięcia

W odróżnieniu od źródeł niesterowanych, których prąd lub napięcie (bądź parametry charakteryzujące je, np. amplituda i częstotliwość) były stałe, ustalone na etapie wytworzenia, **źródła sterowane** z definicji zależą od wielkości sterujących, którymi mogą być prąd lub napięcie dowolnego innego elementu w obwodzie.

Źródło sterowane jest więc elementem czterozaciskowym i charakteryzuje się tym, że napięcie lub prąd na jego zaciskach wyjściowych są proporcjonalne do napięcia lub prądu związanego z drugą parą zacisków sterujących. Wyróżnić można cztery rodzaje źródeł sterowanych:

- źródło napięcia sterowane napięciem, opisane równaniem

$$u_2 = au_1$$

- źródło napięcia sterowane prądem, opisane równaniem

$$u_2 = ri_1$$

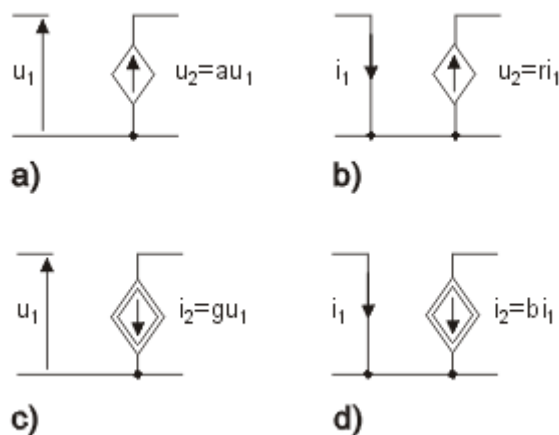
- źródło prądu sterowane napięciem, opisane równaniem

$$i_2 = gu_1$$

- źródło prądu sterowane prądem, opisane równaniem

$$i_2 = bi_1$$

Schematy graficzne wszystkich wymienionych tu rodzajów źródeł sterowanych prądu i napięcia przedstawione są na rys. 1.7.



Rys. 1.7. Schematy graficzne źródeł sterowanych



Wielkości r , g oraz a i b stanowią współczynniki proporcjonalności między wielkością sterującą i sterowaną tych źródeł. Przyjmują one najczęściej wartości rzeczywiste, choć w różnego rodzaju modelach mogą być również opisane funkcją zespoloną. Należy nadmienić, że źródła sterowane stanowią bardzo popularne modele wielu elementów elektrycznych i elektronicznych, takich jak transformatory idealne, maszyny elektryczne, tranzystory bipolarne i polowe, wzmacniacze operacyjne napięciowe i prądowe, itp.

1.3. Prawa Kirchhoffa

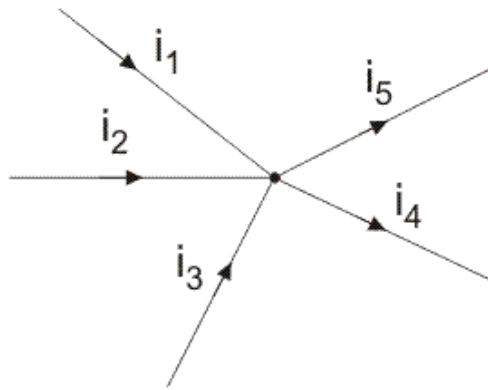
Pod pojęciem analizy obwodu elektrycznego rozumie się proces określania rozptywu prądów i rozkładu napięć w obwodzie przy założeniu, że znana jest struktura obwodu oraz wartości wszystkich jego elementów. Podstawę analizy obwodów elektrycznych stanowią prawa Kirchhoffa, podane przez niemieckiego fizyka Gustawa Kirchhoffa w dziewiętnastym wieku. Wyróżnia się dwa prawa określające rozptyw prądów i rozkład napięć w obwodzie. Pierwsze prawo Kirchhoffa kojarzy się zwykle z bilansem prądów w węźle obwodu elektrycznego a drugie z bilansem napięć w oczku.

1.3.1. Prawo prądowe

Suma prądów w każdym węźle obwodu elektrycznego jest równa zero

$$\sum_k i_k = 0 \quad (1.10)$$

Sumowanie dotyczy wszystkich prądów, które dopływają lub odpływają z danego oczka, przy czym wszystkie prądy wpływające do węzła brane są z jednakowym znakiem a wszystkie prądy wypływające z węzła ze znakiem przeciwnym (nie jest istotne czy znak plus dotyczy prądów wpływających czy wypływających). Sposób tworzenia równania prądowego Kirchhoffa zilustrujemy dla jednego węzła obwodu przedstawionego na rys. 1.8.



Rys. 1.8. Przykład węzła obwodu elektrycznego

Prawo Kirchhoffa dla tego węzła z uwzględnieniem kierunków prądów w węźle zapiszemy w postaci

$$i_1 + i_2 + i_3 - i_4 - i_5 = 0$$

Można je również zapisać jako bilans prądów dopływających i odpływających od węzła w postaci

$$i_1 + i_2 + i_3 = i_4 + i_5$$

Dla każdego obwodu można napisać dokładnie $n-1$ niezależnych równań prądowych, gdzie n oznacza całkowitą liczbę węzłów a $(n-1)$ liczbę węzłów niezależnych. Bilans prądów w pozostałym n -tym węźle obwodu wynika z równań prądowych napisanych dla $n-1$ węzłów

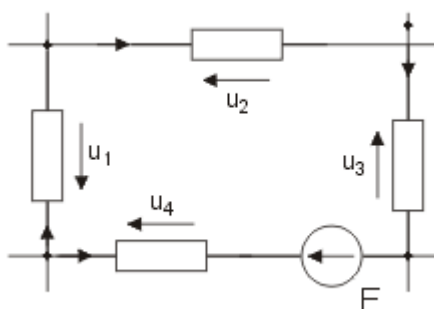
(jest to węzeł zależny zwany węzłem odniesienia). Wybór węzła odniesienia jest całkowicie dowolny.

1.3.2. Prawo napięciowe

Suma napięć w każdym oczku obwodu elektrycznego jest równa zero

$$\sum_k u_k = 0 \quad (1.11)$$

Sumowanie dotyczy napięć gałęziowych występujących w danym oczku zorientowanych względem dowolnie przyjętego kierunku odniesienia. Napięcie gałęziowe zgodne z tym kierunkiem jest brane z plusem a przeciwne z minusem. Sposób pisania równań wynikających z prawa napięciowego Kirchhoffa pokażemy na przykładzie oczka obwodu przedstawionego na rys. 1.9.



Rys. 1.9. Przykład oczka obwodu z oznaczeniami napięć gałęziowych

Uwzględniając kierunki napięć gałęziowych równanie napięciowe Kirchhoffa dla tego oczka przyjmie postać

$$u_1 + u_2 + u_3 - u_4 - e = 0$$

Można je również zapisać jako bilans napięć źródłowych i odbiornikowych w postaci

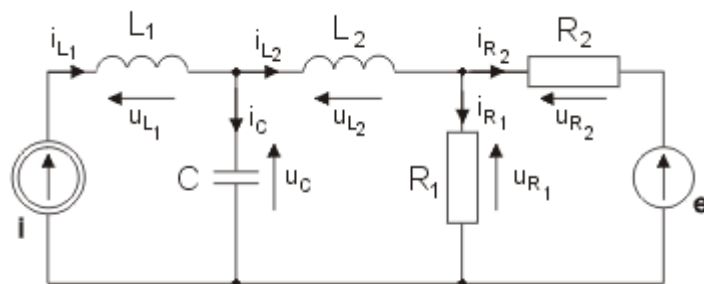
$$e = u_1 + u_2 + u_3 - u_4$$

Dla każdego obwodu można napisać tyle równań oczkowych ile oczek wyodrębnimy w tym obwodzie, przy czym część równań oczkowych będzie równaniami zależnymi (wynikającymi

z liniowej kombinacji innych równań). Liczba równań oczkowych branych pod uwagę w analizie jest więc równa liczbie oczek niezależnych.

Przykład 1.1

Napiszmy równania Kirchhoffa dla obwodu z rys. 1.10.



Rys. 1.10. Schemat obwodu poddanego analizie w przykładzie 1.1

Rozwiązanie

Zgodnie z prawami Kirchhoffa równania obwodu przyjmą następującą postać.

- Równania prądowe:

$$i_{L1} - i_{L2} - i_C = 0$$

$$i_{L2} - i_{R1} - i_{R2} = 0$$

$$i_{L1} = i$$

- Równania napięciowe:

$$u_C - u_{L2} - u_{R1} = 0$$

$$u_{R1} - u_{R2} - e = 0$$

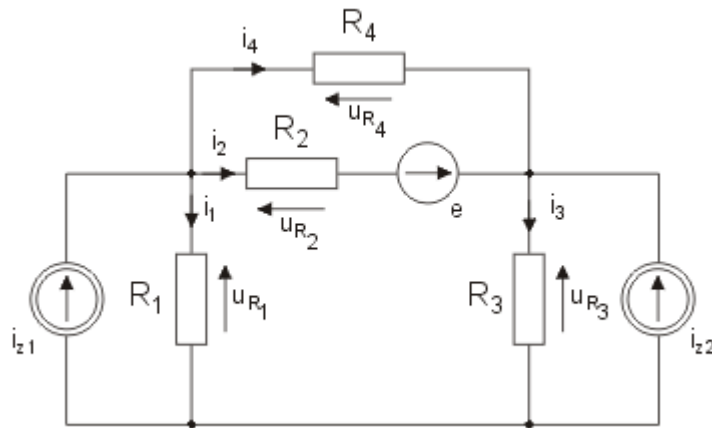
Przedstawiony tu układ równań jest wystarczający do uzyskania wszystkich innych wielkości prądowych bądź napięciowych w obwodzie. Należy go jedynie uzupełnić o równania definicyjne wiążące prąd i napięcie każdego elementu. Po takim uzupełnieniu uzyskuje się pełny opis obwodu a jego rozwiązanie pozwala wyznaczyć rozptyw prądów i rozkład napięć w obwodzie.

Szczególnie proste zależności otrzymuje się dla obwodu rezystancyjnego, zawierającego oprócz źródeł wymuszających jedynie rezystory oraz (ewentualnie) źródła sterowane o rzeczywistych współczynnikach sterowania. Dla takich obwodów równania elementów rezystancyjnych są dane w postaci zależności algebraicznych, które wstawione do równań Kirchhoffa pozwalają utworzyć układ równań algebraicznych o liczbie zmiennych

równych liczbie równań. Sposób tworzenia takiego układu równań pokażemy na przykładzie obwodu z rys. 1.11.

Przykład 1.2

Należy określić rozpyły prądów i rozkład napięć w obwodzie rezystancyjnym o strukturze przedstawionej na rys. 1.11. Wartości elementów są następujące: $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $R_4 = 4\Omega$, $e = 10V$, $i_{z1} = 2A$, $i_{z2} = 5A$.



Rys. 1.11. Struktura obwodu poddanego analizie w przykładzie 1.2

Rozwiązanie

Z równań Kirchhoffa otrzymuje się

$$i_{z1} - i_1 - i_2 - i_4 = 0$$

$$i_2 + i_4 + i_{z2} - i_3 = 0$$

$$u_{R1} - u_{R2} + e - u_{R3} = 0$$

$$u_{R2} - e - u_{R4} = 0$$

Równania elementów rezystancyjnych: $u_{R1} = R_1 i_1$, $u_{R2} = R_2 i_2$, $u_{R3} = R_3 i_3$, $u_{R4} = R_4 i_4$ tworzą wspólnie z równaniami Kirchhoffa następujący układ równań algebraicznych:

$$i_1 + i_2 + i_4 = i_{z1}$$

$$i_2 - i_3 + i_4 = -i_{z2}$$

$$R_1 i_1 - R_2 i_2 - R_3 i_3 = -e$$

$$R_2 i_2 - R_4 i_4 = e$$

Po wstawieniu danych liczbowych do powyższych równań otrzymuje się:

$$i_1 + i_2 + i_4 = 2$$

$$i_2 - i_3 + i_4 = -5$$

$$i_1 - 2i_2 - 3i_3 = -10$$

$$2i_2 - 4i_4 = 10$$

W wyniku rozwiązania tego układu równań otrzymuje się: $i_1 = 3,187\text{A}$, $i_2 = 0,875\text{A}$, $i_3 = 3,812\text{A}$ oraz $i_4 = -2,062\text{A}$. Łatwo sprawdzić przez podstawienie obliczonych wartości do układu równań, że bilans prądów w każdym węźle oraz bilans napięć w każdym oczku obwodu jest zerowy.

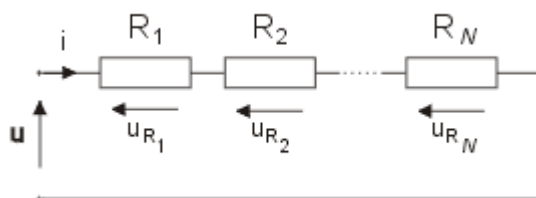
1.4. Przekształcenia obwodów

W analizie obwodów elektrycznych ważną rolę odgrywa upraszczanie struktury obwodu, polegające na zastępowaniu wielu elementów połączonych szeregowo lub równolegle poprzez jeden element zastępczy. Umożliwia to zmniejszenie liczby równań w opisie obwodu i uproszczenie etapu rozwiązania tych równań. Wyróżnić można cztery podstawowe rodzaje połączeń elementów, do których stosuje się przekształcenie. Są to:

- połączenie szeregowe
- połączenie równoległe
- połączenie gwiazdowe
- połączenie trójkątne.

1.4.1. Układ połączenia szeregowego elementów

W połączeniu szeregowym elementów koniec jednego elementu jest bezpośrednio połączony z początkiem następnego. Rys. 1.12 przedstawia schemat ogólny połączenia szeregowego rezystorów.



Rys. 1.12. Połączenie szeregowe elementów

Prąd każdego elementu obwodu jest jednakowy i równy i , natomiast napięcie na zaciskach zewnętrznych obwodu jest równe sumie napięć poszczególnych elementów tworzących połączenie. Napięciowe równanie Kirchhoffa dla obwodu z rys. 1.12 przyjmuje więc postać

$$u = (R_1 + R_2 + \dots + R_N)i \quad (1.12)$$

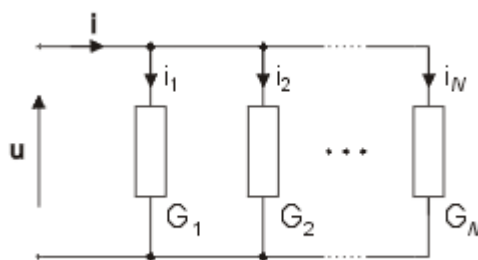
Przy oznaczeniu sumy rezystancji przez R

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_N \quad (1.13)$$

otrzymuje się uproszczenie N rezystorów połączonych szeregowo do jednego rezystora zastępczego o rezystancji R opisanej wzorem (1.13). Rezystancja wypadkowa połączenia szeregowego rezystorów jest równa sumie rezystancji poszczególnych elementów tworzących to połączenie.

1.4.2. Układ połączenia równoległego elementów

W połączeniu równoległym początki i końce wszystkich elementów są ze sobą bezpośrednio połączone, jak to pokazano dla elementów rezystancyjnych na rys. 1.13.



Rys. 1.13. Połączenie równoległe elementów

Z połączenia tego wynika, że napięcie na wszystkich elementach jest jednakowe a prąd wypadkowy jest równy sumie prądów wszystkich elementów obwodu. Prądowe prawo Kirchhoffa dla obwodu z rys. 1.13 można więc zapisać w postaci

$$i = (G_1 + G_2 + \dots + G_N)u \quad (1.11)$$

przy czym G_i ($i = 1, 2, \dots, N$) stanowią konduktancje rezystorów, $G_i = 1/R_i$. Przy oznaczeniu sumy konduktancji przez G , gdzie

$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_N \quad (1.12)$$

otrzymuje się uproszczenie N rezystorów połączonych równolegle do jednego rezystora zastępczego o konduktancji G opisanej wzorem (1.12). Jak widać w połączeniu równoległym rezystorów konduktancja wypadkowa jest równa sumie konduktancji poszczególnych rezystorów.

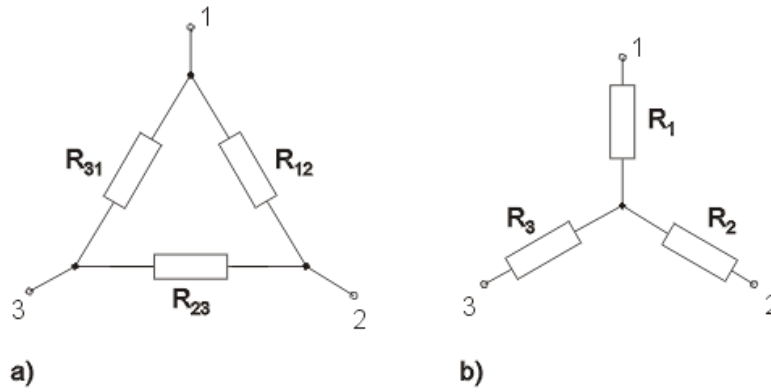
Szczególnie prosty jest wzór na rezystancję zastępczą dla 2 rezystorów połączonych równolegle. W tym przypadku $G = G_1 + G_2$. Uwzględniając, że $G = 1/R$ po prostych przekształceniach otrzymuje się

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Należy jednak podkreślić, że przy trzech (i więcej) elementach połączonych równolegle wygodniejsze jest operowanie na konduktancjach a przejście na rezystancję zastępczą wykonuje się w ostatnim kroku po ustaleniu wartości sumy konduktancji.

1.4.3. Transfiguracja gwiazda-trójkąt i trójkąt-gwiazda

Operowanie uproszczonym schematem wynikającym z połączenia szeregowego i równoległego elementów jest najwygodniejszym sposobem redukcji obwodu. W przypadku gdy nie ma elementów połączonych szeregowo czy równolegle możliwe jest dalsze uproszczenie przez zastosowanie przekształcenia gwiazda-trójkąt lub trójkąt-gwiazda. Oznaczenia elementów obwodu trójkąta i gwiazdy są przedstawione na rys. 1.14.



Rys. 1.14. Połączenie trójkątne i gwiazdowe elementów

Transfiguracja trójkąta na gwiazdę lub gwiazdy na trójkąt polega na przyporządkowaniu danej konfiguracji elementów konfiguracji zastępczej, równoważnej jej z punktu widzenia zacisków zewnętrznych (te same prądy przy tych samych napięciach międzyzaciskowych). Dla uzyskania niezmiennych prądów zewnętrznych obwodu gwiazdy i trójkąta rezystancje między parami tych samych zacisków gwiazdy i trójkąta powinny być takie same. Zostało udowodnione, że warunki powyższe są automatycznie spełnione, jeśli przy zamianie gwiazdy na trójkąt spełnione są następujące warunki na rezystancje

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} \quad (1.13)$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \quad (1.14)$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2} \quad (1.15)$$

Podobnie przy zamianie trójkąta na gwiazdę rezystancje gwiazdy muszą spełniać warunki

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (1.16)$$

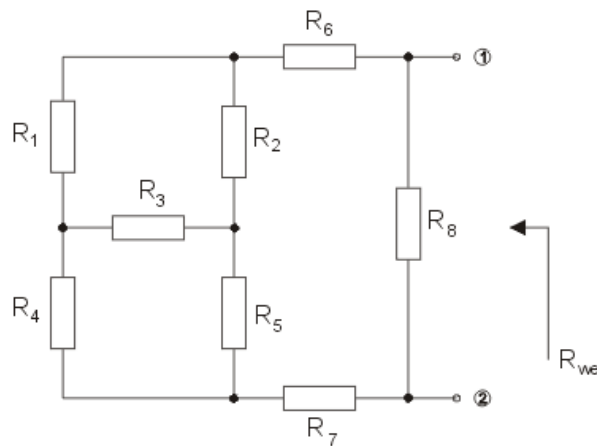
$$R_2 = \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (1.17)$$

$$R_3 = \frac{R_{31} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (1.18)$$

Przekształcenia równoważne obwodu wykorzystujące reguły połączenia szeregowego, równoległego oraz przekształcenia gwiazda-trójkąt i trójkąt-gwiazda umożliwiają dalszą redukcję tego obwodu i po wykonaniu odpowiedniej liczby przekształceń sprowadzenie go do pojedynczego elementu zastępczego.

Przykład 1.3

Określić rezystancję zastępczą obwodu przedstawionego na rys. 1.15, widzianą z zacisków 1-2. Wartości rezystancji są następujące: $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $R_4 = 2\Omega$, $R_5 = 4\Omega$, $R_6 = 5\Omega$, $R_7 = 5\Omega$ oraz $R_8 = 10\Omega$.



Rys. 1.15. Struktura obwodu do przykładu 1.3.

Rozwiązanie

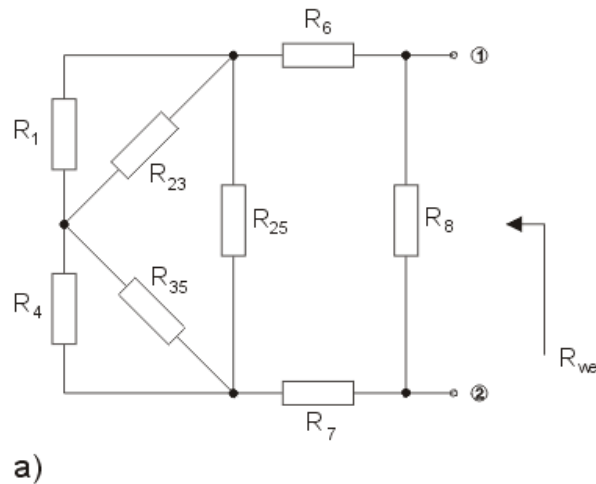
Z punktu widzenia zacisków wejściowych 1-2 w obwodzie nie można wyróżnić żadnego połączenia szeregowego czy równoległego elementów. Dla uproszczenia struktury tego obwodu konieczne jest więc zastosowanie przekształcenia gwiazda-trójkąt lub trójkąt-gwiazda w stosunku do rezystorów położonych najdalej od węzłów wejściowych (w wyniku przekształcenia nie mogą ulec likwidacji węzły wejściowe obwodu). Zamieniając gwiazdę złożoną z rezystorów R_2 , R_3 i R_5 na równoważny jej trójkąt otrzymuje się

$$R_{23} = 3 + 4 + \frac{3 \cdot 4}{4} = 10$$

$$R_{35} = 3 + 4 + \frac{3 \cdot 4}{4} = 10$$

$$R_{25} = 4 + 4 + \frac{4 \cdot 4}{3} = 13,33$$

Schemat obwodu po przekształceniach przedstawiony jest na rys. 1.16.



Rys. 1.16. Schemat obwodu z rys. 1.15 po przekształceniu gwiazda-trójkąt

W obwodzie tym można już wyróżnić połączenia równoległe elementów R_1 i R_{23} oraz R_4 i R_{35} . Wykorzystując regułę upraszczania elementów połączonych równoległe otrzymuje się

$$R_{z1} = \frac{R_1 \cdot R_{23}}{R_1 + R_{23}} = 1,667$$

$$R_{z2} = \frac{R_4 \cdot R_{35}}{R_4 + R_{35}} = 1,667$$

Rezystory R_{z1} i R_{z2} są połączone szeregowo. Ich rezystancja zastępcza jest równa

$$R_{z3} = R_{z1} + R_{z2} = 3,333$$

Jest ona połączona równoległe z rezystorem R_{25} . Stąd rezystancja zastępcza tego połączenia wynosi

$$R_{z4} = \frac{3,333 \cdot 13,33}{3,333 + 13,33} = 2,667$$

Rezystory R_6 , R_{z4} i R_7 są połączone szeregowo. Ich rezystancja zastępcza wynosi więc

$$R_{z5}=R_6+R_{z4}+R_7=12,667$$

Rezystancja ta jest z kolei połączona równolegle z rezystancją R_8 tworząc wypadkową rezystancję obwodu widzianą z zacisków zewnętrznych. Stąd całkowita rezystancja zastępcza obwodu wyraża się wzorem

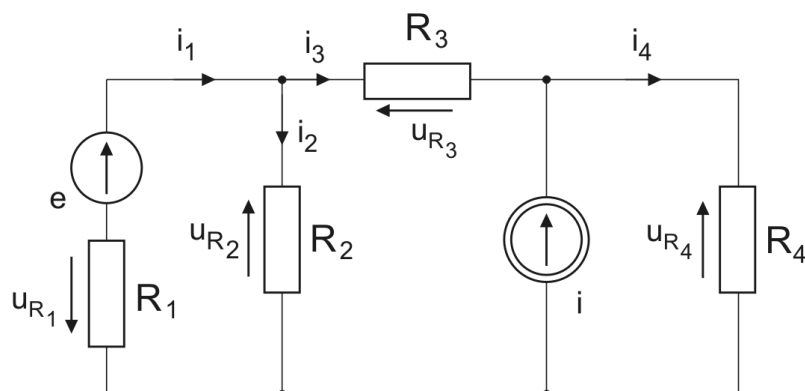
$$R_{we} = \frac{R_{z5}R_8}{R_{z5} + R_8} = \frac{12,667 \cdot 10}{12,667 + 10} = 5,588\Omega$$

Jak widać w powyższym przykładzie przekształcenie gwiazda-trójkąt umożliwiło dalsze uproszczenie obwodu i otrzymanie ostatecznego wyniku na rezystancję widzianą z zacisków wejściowych. Należy jednak zaznaczyć, że przekształcenia gwiazda-trójkąt i trójkąt-gwiazda są bardziej złożone obliczeniowo w stosunku do reguły upraszczania połączenia szeregowego i równoległego. Stosuje się je tylko wtedy, gdy w obwodzie nie da się wyróżnić żadnych połączeń szeregowych i równoległych.

Zadania sprawdzające

Zadanie 1.1

Stosując prawa Kirchhoffa wyznaczyć prądy w obwodzie przedstawionym na rysunku 1.17, jeśli $R_1=1\Omega$, $R_2=5\Omega$, $R_3=10\Omega$, $R_4=4\Omega$, a wartości źródeł są następujące: $e=10V$, $i=5A$.



Rys. 1.17. Schemat obwodu do zadania 1.1.

Rozwiązanie

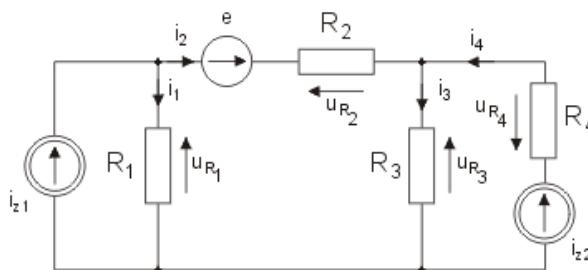
Korzystając z praw Kirchhoffa otrzymuje się układ równań opisujących obwód w postaci

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\ -i_3 + i_4 &= i \\ R_1 i_1 + R_2 i_2 &= e \\ R_2 i_2 - R_3 i_3 - R_4 i_4 &= 0 \end{aligned}$$

Po wstawieniu wartości liczbowych parametrów i rozwiązaniu układu równań otrzymuje się:
 $i_1 = 1,011\text{A}$, $i_2 = 1,798\text{A}$, $i_3 = -0,786\text{A}$ oraz $i_4 = 4,214\text{A}$.

Zadanie 1.2

Stosując prawa Kirchhoffa wyznaczyć prądy w obwodzie przedstawionym na rysunku 1.18, jeśli $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 5\Omega$, $R_4 = 5\Omega$, a wartości źródeł są następujące: $e = 20\text{V}$, $i_{z1} = 1\text{A}$, $i_{z2} = 2\text{A}$.



Rys. 1.18. Schemat obwodu do zadania 1.2.

Rozwiązanie

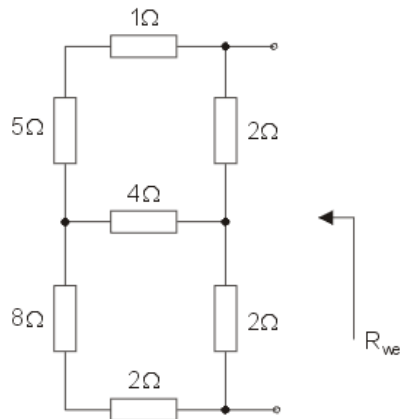
Korzystając z praw Kirchhoffa otrzymuje się układ równań opisujących obwód w postaci

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 &= i_{z1} \\ i_2 - i_3 &= -i_{z2} \\ R_1 i_1 - R_2 i_2 - R_3 i_3 &= -e \\ i_4 &= i_{z2} \end{aligned}$$

Po wstawieniu wartości liczbowych otrzymuje się: $i_1 = -0,375\text{A}$, $i_2 = 1,375\text{A}$, $i_3 = 3,375\text{A}$ oraz $i_4 = 2\text{A}$.

Zadanie 1.3

Wyznaczyć rezystancję wypadkową obwodu przedstawionego na rys. 1.19



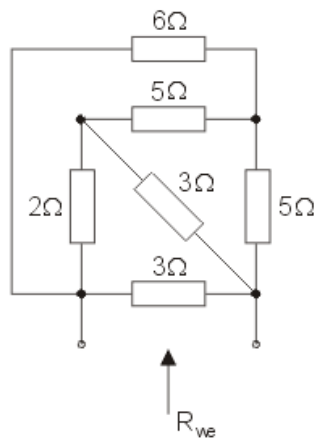
Rys. 1.19. Schemat obwodu do zadania 1.3

Rozwiązanie

Należy najpierw zastosować transformację trójkąt-gwiazda lub gwiazda-trójkąt w odniesieniu do wybranych trzech rezystorów obwodu, a następnie wykorzystać uproszczenia wynikające z powstałych połączeń szeregowych i równoległych w obwodzie. Po wykonaniu tych działań otrzymuje się $R_{we} = 3,18\Omega$.

Zadanie 1.4

Wyznaczyć rezystancję wypadkową obwodu przedstawionego na rys. 1.20



Rys. 1.20. Schemat obwodu do zadania 1.4

Rozwiązanie

Ponieważ w obwodzie nie można wyróżnić żadnych połączeń szeregowych i równoległych należy najpierw zastosować transformację trójkąt-gwiazda lub gwiazda-trójkąt w odniesieniu do wybranych trzech rezystorów obwodu (np. transfiguracja gwiazdy 2Ω , 3Ω i 5Ω na równoważny trójkąt) a następnie wykorzystać uproszczenia wynikające z powstałych połączeń szeregowych i równoległych w obwodzie. Po wykonaniu tych działań otrzymuje się wartość rezystancji zastępczej obwodu równą $R_{we} = 1,59\Omega$.

Lekcja 2. Metoda symboliczna analizy obwodów w stanie ustalonym przy wymuszeniu sinusoidalnym

Wstęp

Spośród wielu różnych rodzajów wymuszeń stosowanych w obwodach elektrycznych, do najważniejszych należy wymuszenie sinusoidalne, ze względu na to, że w praktyce codziennej mamy do czynienia z napięciem i prądem sinusoidalnym generowanym w elektrowniach. Analiza obwodów RLC przy wymuszeniu sinusoidalnym naraża pewne problemy związane z koniecznością rozwiązania układu równań różniczkowych, wynikających z opisu ogólnego kondensatorów i cewek. W lekcji drugiej poznamy metodę symboliczną analizy obwodów RLC w stanie ustalonym przy wymuszeniu sinusoidalnym.

Dzięki tej metodzie układ równań różniczkowo-całkowych opisujących obwód RLC zostaje sprowadzony do układu równań algebraicznych typu zespolonego. Wprowadzone zostanie pojęcie wartości skutecznej zespolonej, impedancji i admitancji zespolonej oraz prawa Kirchhoffa dla wartości skutecznych zespolonych. Prawo prądowe i napięciowe Kirchhoffa dla obwodów RLC w metodzie symbolicznej stosuje się identycznie jak dla obwodów rezystancyjnych prądu stałego zastępując rezystancję pojęciem impedancji zespolonej. W rezultacie otrzymuje się wartości zespolone odpowiedzi, którym można przyporządkować wartości chwilowe zgodnie z metodą symboliczną. Uzupełnieniem tej lekcji są wykresy wektorowe przedstawiające na płaszczyźnie zespolonej relacje między wartościami skutecznymi prądów i napięć gałęziowych w obwodzie.



2.1. Parametry sygnału sinusoidalnego

Sygnały sinusoidalne zwane również harmonicznymi są opisane w dziedzinie czasu następującym wzorem (w opisie przyjęto oznaczenie sygnału napięciowego)

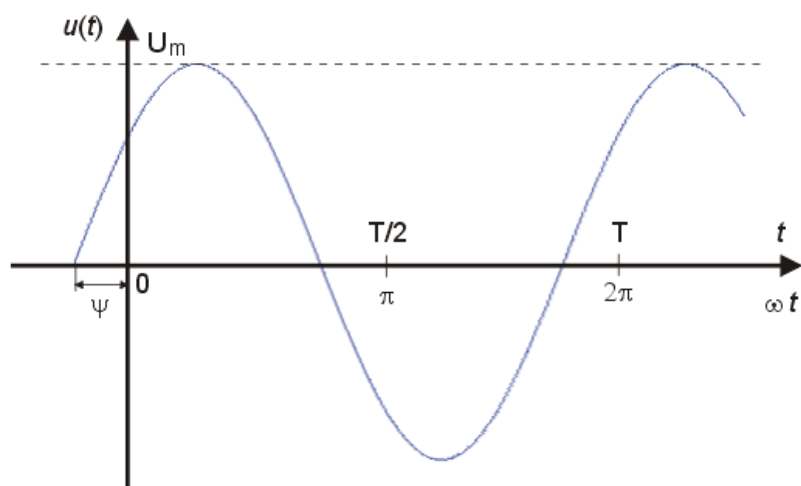
$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi) \quad (2.1)$$

Wielkości występujące w opisie mają następujące nazwy i oznaczenia:

$u(t)$ - wartość chwilowa napięcia

- U_m - **wartość maksymalna** (szczytowa) napięcia zwana również **amplitudą**
- ψ - **faza początkowa** napięcia odpowiadająca chwili $t=0$
- $\omega t + \psi$ - **kąt fazowy** napięcia w chwili t
- $f=1/T$ - **częstotliwość** mierzona w hercach (Hz)
- T - **okres** przebiegu sinusoidalnego
- $\omega = 2\pi f$ - **pulsacja** mierzona w radianach na sekundę.

Wartości chwilowe sygnałów oznaczać będziemy małą literą a wartości maksymalne, skuteczne i wielkości operatorowe dużą.



Rys. 2.1. Sygnał sinusoidalny

Rys. 2.1 przedstawia przebieg sygnału sinusoidalnego napięcia z oznaczeniami poszczególnych jego parametrów. Oś odciętych ma podwójne oznaczenie: czasu oraz fazy (aktualny kąt fazowy).

Przebiegi zmienne w czasie dobrze charakteryzuje **wartość skuteczna**. Dla przebiegu okresowego $f(t)$ o okresie T jest ona definiowana w postaci

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t) dt} \quad (2.2)$$

Łatwo udowodnić, że wartość skuteczna przebiegu okresowego nie zależy od wyboru fazy początkowej. Dla określenia wartości skutecznej sygnału sinusoidalnego przyjmijmy sygnał napięciowy o fazie początkowej równej zero.

$$u(t) = U_m \sin(\omega t) \quad (2.3)$$

Wartość skuteczna tego sygnału określona jest więc zależnością

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U_m^2 \sin^2(\omega t) dt} \quad (2.4)$$

Wykonując operację całkowania otrzymuje się

$$\begin{aligned} \int_0^T U_m^2 \sin^2(\omega t) dt &= 0,5 U_m^2 \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt = \\ 0,5 T U_m^2 - 0,25 \frac{U_m^2}{\omega} \sin 2\omega t \Big|_0^T &= 0,5 T U_m^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Stąd po podstawieniu do wzoru (2.4) otrzymuje się

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad (2.6)$$

Analogicznie w przypadku prądu sinusoidalnego

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \quad (2.7)$$

otrzymujemy identyczną relację

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (2.8)$$

Dla sygnału sinusoidalnego wartość skuteczna jest więc $\sqrt{2}$ razy mniejsza niż jego wartość maksymalna.

Drugim parametrem charakteryzującym sygnał sinusoidalny jest wartość średnia, czyli pole zawarte pod krzywą odniesione do czasu, w którym ta wartość jest obliczana. Wartość średnią sygnału w okresie T definiuje zależność

$$F_{sr} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad (2.9)$$

Ze względu na symetrię funkcji sinusoidalnej **wartość średnia całookresowa** jest z definicji równa zero. W elektrotechnice używa się pojęcia wartości **średniej półokresowej**, w której przyjmuje się $T \rightarrow T/2$. W tym przypadku można udowodnić, że wartość średnia półokresowa dla sygnału sinusoidalnego jest powiązana z wartością maksymalną poprzez relację

$$U_{sr} = \frac{1}{T/2} \int_{t_0}^{t_0+T/2} U_m \sin(\omega t) dt = 0,637 U_m \quad (2.10)$$

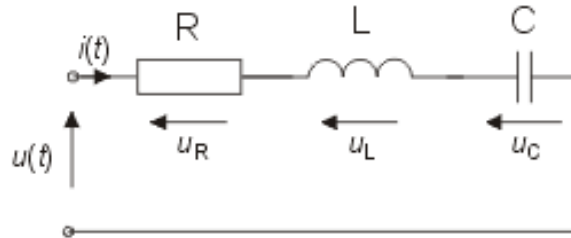
Należy zauważyć, że napięcie stałe $u(t)=U$ jest szczególnym przypadkiem sygnału sinusoidalnego, dla którego częstotliwość jest równa zero ($f=0$) a wartość chwilowa jest stała i równa $u(t)=U_m \sin(\psi)=U$. Jest to ważna właściwość, gdyż dzięki temu metody analizy obwodów o wymuszeniu sinusoidalnym mogą mieć zastosowanie również do wymuszeń stałych przy założeniu $f=0$. Dla sygnału stałego wartość maksymalna, skuteczna i średnia są sobie równe i równają się danej wartości stałej.

2.2. Metoda symboliczna analizy obwodów RLC w stanie ustalonym przy wymuszeniu sinusoidalnym

Analiza obwodów zawierających elementy RLC przy wymuszeniu sinusoidalnym napotyka na pewne trudności związane z wystąpieniem w opisie cewki i kondensatora równań różniczkowych. Trudności te łatwo jest pokonać w stanie ustalonym. **Stanem ustalonym** obwodu nazywać będziemy taki stan, w którym charakter odpowiedzi jest identyczny jak charakter wymuszenia, to znaczy odpowiedzią na wymuszenie sinusoidalne jest odpowiedź również sinusoidalna o tej samej częstotliwości choć o różnej amplitudzie i fazie

początkowej. Dla stanu ustalonego obwodu wprowadzona zostanie **metoda symboliczna** sprowadzająca wszystkie operacje różniczkowe i całkowe do działań algebraicznych na liczbach zespolonych.

Dla wprowadzenia tej metody przyjmijmy, że rozważany jest obwód szeregowy RLC (rys. 2.2) zasilany ze źródła napięcia sinusoidalnego $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$.



Rys. 2.2. Połączenie szeregowe elementów RLC

Z prawa napięciowego Kirchhoffa wynika następujący związek między napięciami elementów tego obwodu

$$u(t) = u_R + u_L + u_C \quad (2.11)$$

Biorąc pod uwagę podstawowe zależności definicyjne dla rezystora, cewki i kondensatora

$$u_R = Ri,$$

$$u_C = 1/C \int i dt$$

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

otrzymuje się

$$U_m \sin(\omega t + \psi) = Ri + \frac{1}{C} \int i dt + L \frac{di}{dt} \quad (2.12)$$

Jest to równanie różniczkowo-całkowe opisujące zależności między wartościami chwilowymi prądu i napięcia wymuszającego w obwodzie. Pełne rozwiązanie tego równania sprowadza się

do wyznaczenia dwu składowych prądu, stanowiących odpowiedź obwodu w stanie ustalonym i stanie przejściowym:

1. **składowej ustalonej**, której charakter zmian w czasie jest taki sam jak sygnału wymuszającego (przy sinusoidalnym wymuszeniu odpowiedź również sinusoidalna o tej samej częstotliwości)
2. **składowej przejściowej** stanowiącej rozwiązanie równania różniczkowego pochodzącego od niezerowych warunków początkowych.

Składowa przejściowa zanika zwykle szybko w czasie i pozostaje jedynie składowa ustalona. Stan po zaniknięciu składowej przejściowej nazywamy stanem ustalonym obwodu. Składową ustaloną prądu w obwodzie można otrzymać nie rozwiązując równania różniczkowego opisującego ten obwód a korzystając jedynie z tzw. **metody symbolicznej**. Istotnym elementem tej metody jest zastąpienie przebiegów czasowych ich reprezentacją zespoloną. Przyjmijmy, że prąd $i(t) = I_m \sin(\omega t + \Psi_i)$ oraz napięcie $u(t) = U_m \sin(\omega t + \Psi)$ zastąpione zostały przez wektory wirujące w czasie, odpowiednio $I(t)$ oraz $U(t)$ określone w postaci

$$U(t) = U_m e^{j\Psi} e^{j\omega t} \quad (2.13)$$

$$I(t) = I_m e^{j\Psi_i} e^{j\omega t} \quad (2.14)$$

Po zastąpieniu wartości czasowych prądu i napięcia w równaniu (2.12) poprzez ich reprezentację w postaci wektorów wirujących otrzymuje się

$$U(t) = RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int I(t) dt \quad (2.15)$$

Po wykonaniu operacji różniczkowania i całkowania równanie powyższe przyjmuje postać

$$U_m e^{j\Psi} e^{j\omega t} = RI_m e^{j\Psi_i} e^{j\omega t} + j\omega LI_m e^{j\Psi_i} e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} I_m e^{j\Psi_i} e^{j\omega t} \quad (2.16)$$

Dzieląc obie strony równania przez $e^{j\omega t}$ i przechodząc do wartości skutecznych (w tym celu należy podzielić obie strony równania przez $\sqrt{2}$) otrzymuje się

$$\frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi} = R \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i} + j\omega L \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i} + \frac{1}{j\omega C} \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i} \quad (2.17)$$

Oznaczmy przez $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi}$ wartość skuteczną zespoloną napięcia, a przez $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i}$ wartość skuteczną zespoloną prądu. Wtedy równanie (2.15) można zapisać w następującej postaci obowiązującej dla wartości skutecznych zespolonych

$$U = RI + j\omega LI + \frac{1}{j\omega C} I \quad (2.18)$$

Składnik

$$U_R = RI \quad (2.19)$$

odpowiada napięciu skutecznemu zespolonemu na rezystorze. Wielkość

$$U_L = j\omega LI \quad (2.20)$$

reprezentuje wartość skuteczną zespoloną napięcia na cewce, a składnik

$$U_C = \frac{1}{j\omega C} I \quad (2.21)$$

odpowiada wartości skutecznej zespolonej napięcia na kondensatorze. Wszystkie napięcia i prąd w obwodzie są wartościami zespolonymi. Równanie (2.18) wyraża prawo napięciowe Kirchhoffa odnoszące się do wartości skutecznych zespolonych dla obwodu szeregowego RLC. Stwierdza ono, że przy wymuszeniu sinusoidalnym wartość skuteczna napięcia wymuszającego w obwodzie szeregowym RLC jest równa sumie wartości skutecznych zespolonych napięć na poszczególnych elementach tego obwodu.

Analizując postać równania (2.18) można zauważyć prostą analogię do równania opisującego obwód rezystancyjny. W tym celu wprowadzimy uogólnienie rezystancji w postaci pojęcia **impedancji zespolonej** wiążącej wartości skuteczne prądu i napięcia na

elementach R, L, C w stanie ustalonym przy wymuszeniu sinusoidalnym. Z ostatnich równań na podstawie prawa Ohma można napisać następujące przyporządkowania:

- Dla rezystora

$$Z_R = R \quad (2.22)$$

impedancja Z_R jest równa rezystancji tego rezystora.

- Dla cewki

$$Z_L = j\omega L \quad (2.23)$$

impedancja Z_L jest liczbą zespoloną (urojoną) zależną liniowo od częstotliwości.

- Dla kondensatora

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} \quad (2.24)$$

impedancja Z_C jest także zespolona i odwrotnie proporcjonalna do częstotliwości.

Wartość $X_L = \omega L$ nosi nazwę **reaktancji indukcyjnej** a wartość $X_C = \frac{1}{\omega C}$ **reaktancji pojemnościowej**. W związku z powyższym można napisać $Z_L = jX_L$, $Z_C = -jX_C$. Wprowadzając oznaczenie wypadkowej impedancji obwodu przez Z , gdzie $Z = Z_R + Z_L + Z_C$ zależność prądowo-napięciową w obwodzie szeregowym RLC można zapisać w postaci, znanej jako prawo Ohma dla wartości symbolicznych

$$U = ZI \quad (2.25)$$

lub

$$I = \frac{U}{Z} = |I|e^{j\psi_i} \quad (2.26)$$

gdzie moduł prądu

$$|I| = \frac{|U|}{|Z|} = \frac{|U|}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (2.27)$$

natomiast kąt fazowy prądu

$$\psi_i = \psi - \operatorname{arctg} \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \quad (2.28a)$$

Faza początkowa wektora napięcia wymuszającego jest tu oznaczona przez ψ , a faza początkowa wektora prądu – przez ψ_i . Różnica faz nazywana jest **przesunięciem fazowym** prądu względem napięcia i oznaczana literą φ , przy czym

$$\varphi = \psi - \psi_i = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \quad (2.28b)$$

Kąt przesunięcia fazowego φ odgrywa ogromną rolę w elektrotechnice, zwłaszcza w zagadnieniach mocy. Kąt ten jest uważany za dodatni dla obwodów o charakterze indukcyjnym a za ujemny dla obwodów o charakterze pojemnościowym.

Zauważmy, że wartościom skutecznym prądu oraz napięcia można przyporządkować funkcję czasu. Biorąc pod uwagę, że przejście z przebiegu czasowego na opis zespolony (symboliczny) odbywa się według schematu

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi) \longrightarrow \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi} \quad (2.29)$$

powrót z wartości zespolonej do postaci czasowej polega na pomnożeniu modułu wartości skutecznej przez $\sqrt{2}$ i uzupełnieniu wyniku przez dopisanie funkcji $\sin(\omega t + \psi)$. Stąd przykładowo, jeśli wynik zespolony prądu dany jest w postaci $I = 10e^{j50^\circ}$, to odpowiadający mu przebieg czasowy ma postać $i(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 50^\circ)$. Istnieje również ścisła analogia między konduktancją (odwrotność rezystancji) a odwrotnością impedancji. Analogicznie do pojęcia konduktancji w obwodzie rezystancyjnym wprowadza się pojęcie **admitancji zespolonej** dla obwodu RLC. Admitancja jest definiowana jako odwrotność impedancji. Oznaczana jest najczęściej literą Y , przy czym

$$Y = 1/Z \quad (2.30)$$

Admitancja kondensatora jest równa $Y_C = j\omega C$, cewki $Y_L = \frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L}$, natomiast admitancja rezystora jest równa jego konduktancji $Y_R = G = 1/R$. Podobnie odwrotność reaktancji X nosi specjalną nazwę **susceptancji**. Wartość susceptancji dla kondensatora jest równa $B_C = \omega C$, natomiast dla cewki $B_L = 1/\omega L$.

2.3 Prawa Kirchhoffa dla wartości symbolicznych

Przy zastąpieniu wartości rzeczywistych przez wartości zespolone równania różniczkowe zostały zastąpione przez równania algebraiczne. Nastąpiła zatem algebraizacja równań opisujących obwód. Wszystkie elementy RLC traktowane są w podobny sposób i reprezentowane przez swoje impedancje symboliczne w postaci zespolonej. Impedancje zespolone mogą być interpretowane jako uogólnienie rezystancji. Dla obwodu reprezentowanego w postaci symbolicznej obowiązują prawa Kirchhoffa, które mają identyczną postać jak dla obwodu rzeczywistego, z tą różnicą, że zamiast wielkości chwilowych używa się wielkości zespolonych.

Prawo prądowe Kirchhoffa

Suma prądów zespolonych w dowolnym węźle obwodu elektrycznego jest równa zero, co zapiszemy w postaci

$$\sum_k I_k = 0 \quad (2.31)$$

W równaniu tym wszystkie prądy dane są w postaci zespolonej.

Prawo napięciowe Kirchhoffa

Suma napięć zespolonych w każdym oczku obwodu elektrycznego jest równa zero, co zapiszemy w postaci

$$\sum_k U_k = 0 \quad (2.32)$$

W równaniu tym symbolem U oznaczono wszystkie napięcia w postaci zespolonej, zarówno na gałęziach pasywnych jak i źródłowych obwodu. Sposób sumowania (znak plus lub minus)

zarówno prądów jak i napięć jest taki sam jak w przypadku operowania wartościami rzeczywistymi.

2.4. Wykresy wektorowe obwodu

W przypadku analizy obwodów RLC w stanie ustalonym ważnym pojęciem jest wykres wektorowy przedstawiający w sposób orientacyjny zależności między poszczególnymi wektorami prądu i napięcia w obwodzie. Jak wiadomo każdej liczbie zespolonej można przyporządkować reprezentację geometryczną w postaci odpowiedniej zależności wektorowej przedstawionej na płaszczyźnie, w której oś pozioma odpowiada części rzeczywistej a oś pionowa części urojonej liczby zespolonej. Konstruując wykres należy pamiętać, że pomnożenie wektora przez operator j jest równoważne jego obrotowi o kąt 90 stopni przeciwnie do ruchu wskazówek zegara gdyż operator j jest równy e^{j90° . Podobnie pomnożenie wektora przez operator $-j$ jest równoważne jego obrotowi o kąt 90 stopni zgodnie z ruchem wskazówek zegara gdyż operator $-j$ jest równy e^{-j90° . Pomnożenie wektora przez liczbę rzeczywistą nie zmienia pozycji wektora w przestrzeni o ile jest to liczba dodatnia lub zmienia zwrot wektora o 180° jeśli liczba ta jest ujemna.

Z zależności prądowo-napięciowych dla rezystora jest oczywiste, że

$$U_R = RI_R \quad (2.33)$$

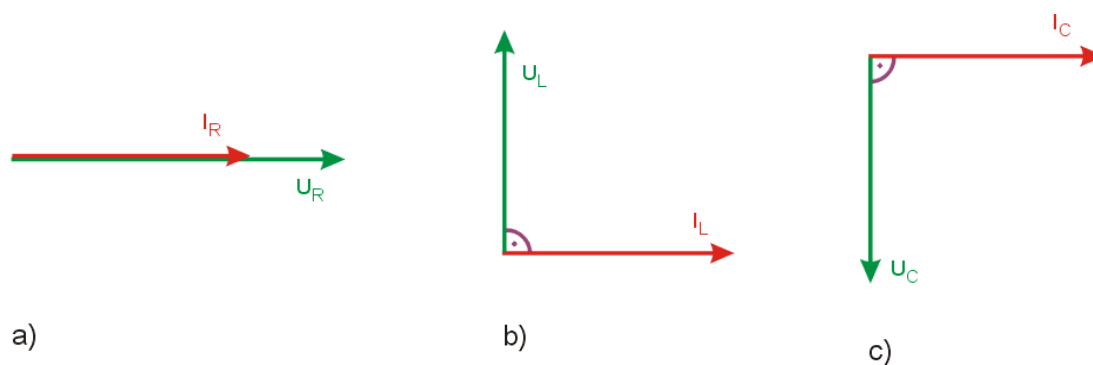
co wobec rzeczywistych, dodatnich wartości R oznacza, że napięcie na rezystorze jest w fazie z prądem tego rezystora. Dla cewki obowiązuje

$$U_L = j\omega LI_L \quad (2.34)$$

co oznacza, że napięcie na cewce wyprzedza prąd o kąt 90° . Podobnie napięcie na kondensatorze opóźnia się względem swojego prądu o kąt 90° , gdyż

$$U_C = -j\frac{1}{\omega C} I_C \quad (2.35)$$

Na rys. 2.3 przedstawiono wykresy wektorowe dla rezystora, cewki i kondensatora z zaznaczeniem przesunięć kątowych między wektorami prądu i napięcia.



Rys. 2.3. Wykresy wektorowe dla a) rezystora, b) cewki, c) kondensatora



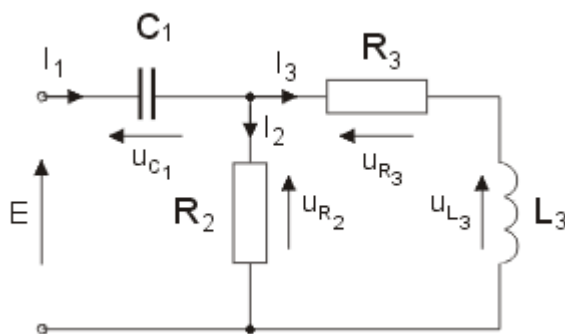
Przedstawione powyżej zasady konstruowania przesunięć kątowych między wektorami prądu i napięcia umożliwiają podanie ogólnych zasad postępowania przy konstruowaniu wykresu wektorowego dla dowolnego obwodu RLC.

Wykres wektorowy z definicji uwzględnia przede wszystkim przesunięcia kątowe między poszczególnymi wektorami. Relacje ilościowe (długości) poszczególnych wektorów są mniej istotne i zwykle uwzględniane w sposób jedynie przybliżony. Wykres rozpoczyna się zwykle od końca obwodu (gałęzi najdalej położonej od źródła). Jeśli gałąź jest połączeniem szeregowym elementów rozpoczynamy od prądu tej gałęzi, a w przypadku połączenia równoległego – od napięcia. Następnie rysuje się na wykresie na przemian napięcia i prądy kolejnych gałęzi, dochodząc w ten sposób do źródła. Budowę wykresu kończy się w momencie dojścia do prądu i napięcia źródłowego obwodu. Relacja wektora prądu źródłowego względem napięcia decyduje o charakterze obwodu. Jeśli napięcie wypadkowe (źródłowe) wyprzedza prąd wypadkowy lub inaczej mówiąc prąd opóźnia się względem napięcia - obwód ma charakter indukcyjny. Jeśli natomiast napięcie opóźnia się względem prądu lub prąd wyprzedza napięcie - mówimy o charakterze pojemnościowym obwodu. Jeśli nie istnieje przesunięcie fazowe prądu wypadkowego względem napięcia (kąt fazowy równy zero) mówimy o tzw. stanie rezonansu obwodu, lub po prostu charakterze rezystancyjnym danego obwodu. Charakter rezystancyjny obwodu może powstać nawet przy istnieniu w obwodu indukcyjności i pojemności w przypadku gdy następuje kompensacja odpowiednich

składowych indukcyjnej i pojemnościowej wektorów. Sposób postępowania przy sporządzaniu wykresów wektorowych przedstawimy na przykładzie konkretnego obwodu.

Przykład 2.1

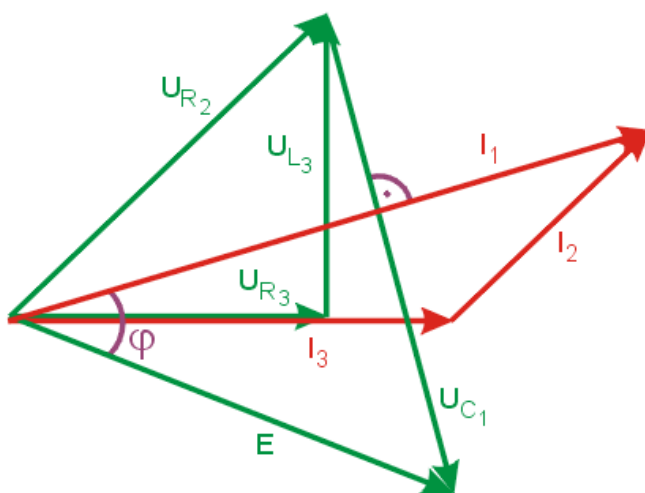
Narysować wykres wektorowy prądów i napięć dla obwodu RLC o strukturze przedstawionej na rys. 2.4.



Rys. 2.4. Schemat obwodu RLC do przykładu 2.1

Rozwiązanie

Na rys. 2.5 przedstawiono wykres wektorowy prądów i napięć w obwodzie RLC z rys. 2.4.



Rys. 2.5. Wykres wektorowy prądów i napięć dla obwodu z rys. 2.4

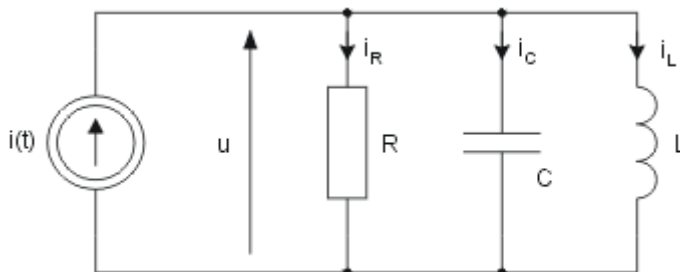


Sporządzanie wykresu rozpoczyna się od prądu I_3 dobudowując kolejno wektory napięć i prądów gałęzi przesuwając się w stronę źródła: U_{R_3} , U_{L_3} , U_{R_2} , I_2 , I_1 , U_{C_1} , E . Jak widać obwód ma charakter pojemnościowy, gdyż napięcie wypadkowe E opóźnia się względem odpowiadającego mu prądu I_1 .

Zadania sprawdzające

Zadanie 2.1

Wyznaczyć rozkłady prądów w obwodzie z rys. 2.6 w stanie ustalonym. Przyjąć następujące wartości parametrów: $i(t) = 5\sqrt{2} \sin(1000t)$ A, $R = 10\Omega$, $C = 0,0001$ F, $L = 5$ mH.



Rys. 2.6. Schemat obwodu do zadania 2.1

Rozwiązanie

Wartości symboliczne elementów obwodu:

$$\omega = 1000$$

$$I = 5$$

$$Z_L = j\omega L = j5$$

$$Z_C = 1/j\omega C = -j10$$

Impedancje obwodu RLC:

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = 0,1 - j0,1$$

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ}$$

Prądy i napięcie w obwodzie:

$$U = ZI = \frac{50}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ}$$

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ}$$

$$I_L = \frac{U}{Z_L} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ}$$

$$I_C = \frac{U}{Z_C} = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{j135^\circ}$$

Wartości chwilowe prądów i napięcia

$$u(t) = 50 \sin(1000t + 45^\circ)$$

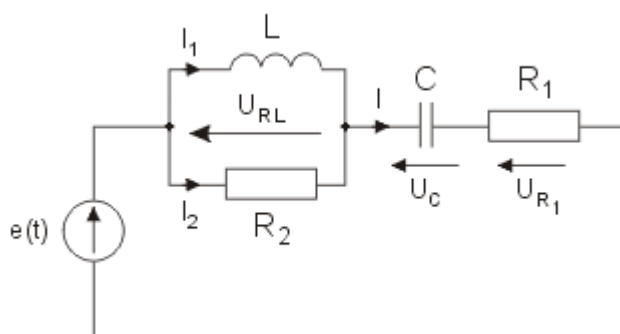
$$i_R(t) = 5 \sin(1000t + 45^\circ)$$

$$i_L(t) = 10 \sin(1000t - 45^\circ)$$

$$i_C(t) = 5 \sin(1000t + 135^\circ)$$

Zadanie 2.2

Wyznaczyć prądy i napięcia w obwodzie przedstawionym na rys. 2.7. Przyjąć następujące wartości elementów: $e(t) = 20\sqrt{2} \sin(100t - 90^\circ)$ V, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $C = 0,001$ F, $L = 0.05$ H.



Rys. 2.7. Schemat obwodu do zadania 2.2

Rozwiązanie

Wartości symboliczne elementów obwodu:

$$\omega = 100$$

$$E = 20e^{-j90^\circ}$$

$$Z_L = j\omega L = j5$$

$$Z_C = 1/j\omega C = -j10$$

Impedancje obwodu:

$$Z_{RL} = \frac{R_2 Z_L}{R_2 + Z_L} = 2,5 + j2,5$$

$$Z = Z_{RL} + R_1 + Z_C = 12,5 - j7,5$$

Prądy i napięcia w obwodzie:

$$I = E/Z = 0,71 - j1,18$$

$$U_{RL} = IZ_{RL} = 4,71 - j1,18$$

$$I_1 = \frac{U_{RL}}{Z_L} = -0,23 - j0,94$$

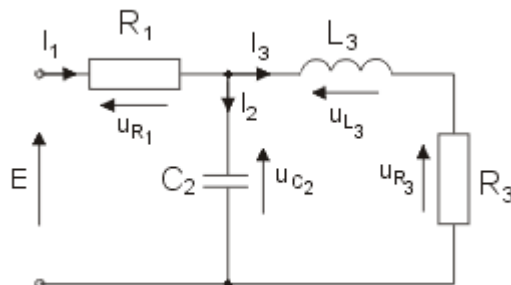
$$I_2 = \frac{U_{RL}}{R} = 0,94 - j0,23$$

$$U_C = IZ_C = -11,76 - j7,06$$

$$U_{R_1} = IR_1 = 7,1 - j11,8$$

Zadanie 2.3

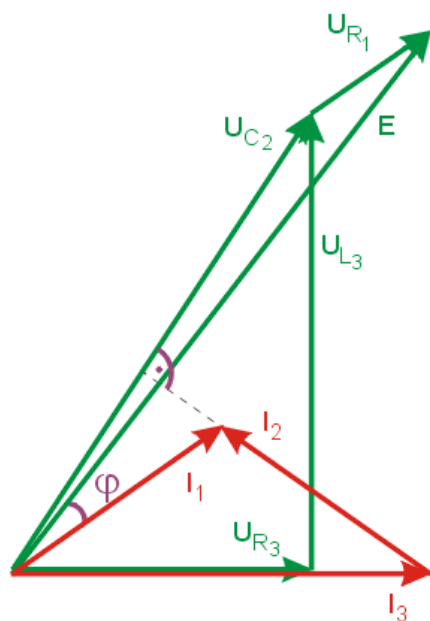
Sporządzić wykres wektorowy prądów i napięć w obwodzie przedstawionym na rys. 2.8.



Rys. 2.8. Schemat obwodu do zadania 2.3

Rozwiązanie

Wykres rozpoczyna się od prądu I_3 , dodając kolejno napięcia na R_3 i L_3 , napięcie U_{C2} , prąd I_{C2} , prąd I_1 oraz napięcie E . Pełny wykres wektorowy przedstawiony jest na rys. 2.9.



Rys. 2.9. Wykres wektorowy obwodu z rys. 2.8



Kąt fazowy przesunięcia prądu względem napięcia zasilającego jest równy φ . Biorąc pod uwagę, że napięcie wyprzedza prąd obwód ma charakter indukcyjny.

Lekcja 3. Zagadnienia mocy w obwodach RLC przy wymuszeniu sinusoidalnym

Wstęp

Jednym z najważniejszych pojęć w elektrotechnice jest moc elektryczna. Jest ona ściśle związana ze zjawiskami energetycznymi zachodzącymi w obwodzie o wymuszeniu sinusoidalnym. Wielkościom prądu i napięcia przyporządkować można różne rodzaje mocy.

Lekcja trzecia poświęcona jest zagadnieniom mocy chwilowej $p(t)$, mocy czynnej P , mocy biernej Q oraz mocy pozornej S . Poznamy wzory wiążące poszczególne rodzaje mocy z prądami i napięciami w obwodzie RLC przy wymuszeniu sinusoidalnym w stanie ustalonym. Podane zostaną wzory wyrażające energię zgromadzoną w cewce i kondensatorze, a na tej podstawie modele rzeczywistej cewki i kondensatora, uwzględniające ich stratności. Ostatnim fragmentem lekcji są zagadnienia dopasowania odbiornika do źródła rzeczywistego o niezerowej impedancji wewnętrznej.

3.1. Moc chwilowa

Wartość chwilową napięcia i prądu gałęzi oznaczmy odpowiednio przez $u(t) = U_m \sin(\omega t)$ oraz $i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi)$ przyjmując dla uproszczenia fazę początkową napięcia równą zeru. Moc chwilowa $p(t)$, jako jedyna z mocy jest funkcją czasu i definiuje się ją w postaci iloczynu wartości chwilowych prądu $i(t)$ oraz napięcia $u(t)$ w obwodzie

$$p(t) = u(t)i(t) \quad (3.1)$$

Przy wymuszeniu sinusoidalnym moc chwilowa opisana jest wzorem

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) = U_m I_m \sin(\omega t) \sin(\omega t - \varphi) = \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] = \\ &= |U||I| [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Z powyższej zależności widać, że moc chwilowa zawiera dwie składowe: stałą $|U||I|\cos(\varphi)$ oraz zmienną w czasie $|U||I|\cos(2\omega t - \varphi)$ o częstotliwości dwukrotnie większej od częstotliwości napięcia i prądu w obwodzie. Jest zatem wielkością zmienną w czasie opisaną

funkcją okresową harmoniczną. Moc chwilowa nie znajduje większego zastosowania praktycznego, natomiast jest niezbędna dla zdefiniowania mocy czynnej.

3.2. Moc czynna

Moc czynną definiuje się jako wartość średnią za okres z mocy chwilowej, to jest

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt \quad (3.3)$$

Podstawiając do powyższego wzoru funkcję określającą moc chwilową w obwodzie, po wykonaniu operacji całkowania otrzymuje się

$$P = |U||I| \cos \varphi \quad (3.4)$$

Moc czynna w obwodzie o wymuszeniu sinusoidalnym jest więc wielkością stałą równą iloczynowi modułów wartości skutecznych napięcia i prądu oraz cosinusa kąta przesunięcia fazowego między wektorem napięcia i prądu. Współczynnik ten odgrywa ogromną rolę w praktyce i nosi specjalną nazwę **współczynnika mocy** ($\cos \varphi$).

Moc czynna stanowi składową stałą mocy chwilowej. Jest ona nieujemna dla obwodu RLC a w granicznym przypadku przy $\varphi = \pm\pi/2$ jest równa zero. Moc czynna osiąga wartość największą $P = |U||I|$ wtedy, gdy $\varphi = 0$, to znaczy gdy odbiornik ma charakter rezystancyjny, $\cos \varphi = 1$. Wartość najmniejszą ($P=0$) moc osiąga w przypadku granicznym, gdy $\varphi = \pm\pi/2$, to znaczy gdy odbiornikiem jest cewka idealna lub kondensator idealny, $\cos \varphi = 0$. Oznacza to, że **na elementach reaktancyjnych nie wydzielą się moc czynna**.

Z przytoczonych rozważań wynika, że moc czynna jest tym większa im mniejszy jest kąt przesunięcia fazowego między prądem i napięciem. Może wydzielać się jedynie na elementach rezystancyjnych i odpowiada energii, która wydziela się w jednostce czasu w postaci ciepła w tych elementach. Uwzględniając, że przesunięcie fazowe prądu i napięcia na rezystorze jest równe zero ($\cos \varphi = 1$) wzór na moc czynną wydzielaną w rezystorze może być wyrażony w trzech równorzędnych postaciach

$$P = |U||I| \cos \varphi = R|I|^2 = G|U|^2 \quad (3.5)$$

w których prąd I oraz napięcie U odpowiadają rezystorowi R . Jednostką mocy czynnej jest **wat** (W) , przy czym $1\text{W}=1\text{AV}$. W praktyce stosuje się również wielokrotności wata w postaci kilowata ($1\text{kW}=1000\text{W}$) lub megawata ($1\text{MW}=10^6\text{W}$) oraz wartości ułamkowe, np. miliwat (mW) lub mikrowat (μW).

3.3. Moc bierna

W obwodach elektrycznych prądu sinusoidalnego definiuje się trzecią wielkość energetyczną będącą iloczynem napięcia i prądu oraz sinusa kąta przesunięcia fazowego między nimi. Wielkość ta oznaczana jest literą Q i nazywana mocą bierną

$$Q = |U||I| \sin \varphi \quad (3.6)$$

Jednostką mocy biernej jest **war** (var) będący skrótem nazwy *woltamper reaktywny*.

Ze względu na występowanie w definicji mocy biernej funkcji sinusoidalnej jest oczywiste, że moc bierna jest tym mniejsza im mniejszy jest kąt przesunięcia fazowego prądu i napięcia. Stąd w przypadku rezystora, dla którego przesunięcie fazowe jest równe zero ($\sin \varphi = 0$) moc bierna jest zerowa. Moc bierna może się więc wydzielać jedynie na elementach reaktancyjnych, gdyż tylko dla nich przesunięcie fazowe prądu i napięcia jest różne od zera. Przesunięcie fazowe prądu i napięcia na elementach reaktancyjnych (cewce i kondensatorze) przyjmuje wartość $+90$ dla cewki oraz -90 dla kondensatora, co oznacza, że sinus kąta jest odpowiednio równy $+1$ dla cewki (moc bierna cewki jest uważana za dodatnią) oraz -1 dla kondensatora (moc bierna kondensatora jest uważana za ujemną). Stąd przy pominięciu znaku wzór na moc bierną elementów reaktancyjnych o reaktancji X może być przedstawiony w trzech równorzędnych postaciach

$$Q = |U||I| \sin \varphi = X|I|^2 = \frac{1}{X}|U|^2 \quad (3.7)$$

W ogólności kąt przesunięcia fazowego φ uważa się za dodatni dla obwodów o charakterze indukcyjnym (napięcie wyprzedza prąd) a za ujemny dla obwodów o charakterze pojemnościowym (napięcie opóźnia się względem prądu). Moc bierna obwodów o

charakterze indukcyjnym jest w sumie mocą indukcyjną, kojarzona z liczbą dodatnią a moc bierna obwodów o charakterze pojemnościowym jest w sumie mocą pojemnościową i kojarzoną z liczbą ujemną.

3.4. Moc pozorna

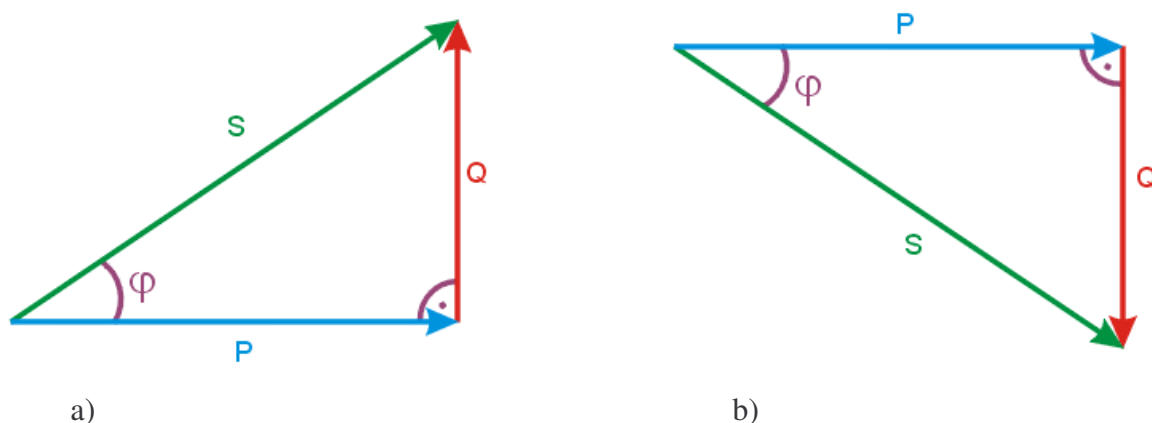
Czwartym rodzajem mocy wprowadzanym w obwodach elektrycznych jest tak zwana moc pozorna. Jest ona proporcjonalna do wartości skutecznych prądu i napięcia, i oznaczana literą S . Moc pozorna definiowana jest formalnie jako liczba zespolona w postaci iloczynu wartości skutecznej zespolonej napięcia U i wartości skutecznej sprzężonej prądu I

$$S = UI^* \quad (3.8)$$

Tak zdefiniowana moc pozorna przedstawia sobą sumę mocy czynnej (część rzeczywista S) oraz mocy biernej (część urojona S), stąd

$$S = P + jQ \quad (3.9)$$

Uwzględniając, że operator j oznacza przesunięcie wektora o kąt 90° , ostatniej zależności na moc pozorną przyporządkować można wykres wektorowy mocy, tzw. **trójkąt mocy** przedstawiony na rys. 3.1.



Rys. 3.1. Wykres wektorowy mocy dla obwodu a) o charakterze indukcyjnym,
b) o charakterze pojemnościowym



Biorąc pod uwagę kierunek przesunięcia prądu względem napięcia na rys. 3.1a wykres mocy dotyczy obwodu o charakterze indukcyjnym a rys. 3.1b obwodu o charakterze pojemnościowym. Wykres ten nazywany jest również trójkątem mocy. W trójkącie mocy składowa czynna i bierna są przyprostokątnymi natomiast moc pozorna przeciwprostokątną.

Zależność na moc pozorną zespoloną można przedstawić również w postaci wykładniczej $S = |S|e^{j\varphi}$. W zależności tej $|S|$ wyraża **moduł mocy pozornej**, który może być wyrażony w postaci iloczynu modułów wartości skutecznych prądu i napięcia

$$|S| = |U||I| = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (3.10)$$

Z wykresu wektorowego obwodu przedstawionego na rys. 3.1 możliwe jest wyznaczenie współczynnika mocy. Mianowicie

$$\cos \varphi = \frac{P}{|S|} \quad (3.11)$$

Wartość współczynnika mocy wyznaczona z powyższej zależności jest identyczna z wartością wynikającą z relacji prądowo-napięciowych zachodzących dla wielkości bramowych obwodu. Dla ułatwienia korzystania z pojęć mocy zestawiono poniżej najważniejsze postacie wzorów na moc czynną, bierną i pozorną

- Moc pozorna

$$S = UI^* = P + jQ \quad (3.12)$$

- Moc czynna

$$P = |U||I|\cos \varphi = \operatorname{Re}(S) = |I_R|^2 R = \frac{|U_R|^2}{R} \quad (3.13)$$

- Moc bierna

$$Q = |U||I|\sin\varphi = \operatorname{Im}(S) = |I_x|^2 X = \frac{|U_x|^2}{X} \quad (3.14)$$

3.5. Bilans mocy

W obwodzie elektrycznym, jak w każdym układzie fizycznym obowiązuje prawo zachowania energii. W przypadku obwodów prawo to przekształca się w tak zwane prawo bilansu mocy.

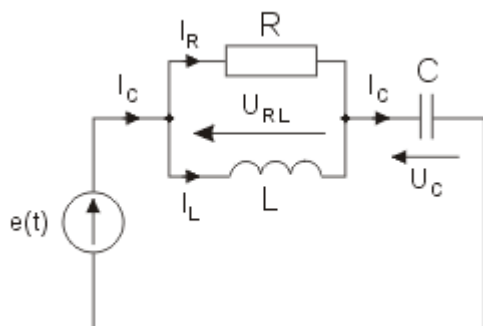
Jeśli całkowitą moc pozorną wytworzoną przez źródło (lub wiele źródeł występujących w obwodzie) oznaczmy przez S_g a sumaryczną moc pozorną wydzieloną w elementach odbiornika przez S_o , to biorąc pod uwagę prawo zachowania energii obie moce muszą być sobie równe, to znaczy $S_g = S_o$. Jest to tak zwana zasada **bilansu mocy** w obwodach elektrycznych.

W tak sformułowanej zasadzie bilansu mocy przyjmuje się standardowo, że zwroty prądów i napięć w elementach odbiornikowych są przeciwne sobie a w elementach źródłowych takie same. Jeśli przyjmiemy ujednoliconą zasadę znakowania prądów i napięć na gałęziach obwodu, zakładając, że niezależnie od rodzaju elementu zwroty prądu i napięcia na gałęzi są przeciwne sobie, to zasadę bilansu mocy można sformułować w ten sposób, że suma mocy liczonej po wszystkich elementach w obwodzie elektrycznym jest równa zero, $S_g + S_o = 0$.

Dla zilustrowania wprowadzonych tu pojęć mocy oraz zasady bilansowania się mocy rozpatrzmy przykład obwodu przedstawionego na rys. 3.2.

Przykład 3.1

Niech dany będzie obwód RLC o strukturze przedstawionej na rys. 3.2 zasilany z sinusoidalnego źródła napięcia $e(t) = 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ V}$ o wartości $\omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Wartości elementów obwodu są następujące: $R = 1\Omega$, $C = 0,5F$, $L = 1H$.



Rys. 3.2. Schemat obwodu do przykładu 3.1



Należy wyznaczyć wartości skuteczne zespolone prądów i napięć elementów oraz moce w obwodzie.

Rozwiązanie

Wartości zespolone impedancji i napięcia wymuszającego w obwodzie przy danych wartościach elementów są równe: $Z_L = j\omega L = j1$, $Z_C = -j1/\omega C = -j2$, $E = 100e^{j45^\circ}$.

Impedancja zastępcza połączenia równoległego L i R równa się $Z_{RL} = \frac{RZ_L}{R + Z_L} = 0.707e^{j45^\circ}$.

Impedancja zastępcza połączenia szeregowego C i Z_{RL} jest równa $Z = Z_C + Z_{RL} = 0.5 + j0.5 - j2 = 1.78e^{-j71.6^\circ}$. Zgodnie z prawem Ohma prąd I w obwodzie jest równy

$$I_C = \frac{E}{Z} = \frac{100e^{j45^\circ}}{1.78e^{-j71.6^\circ}} = 63.3e^{j116.6^\circ}$$

Napięcia na poszczególnych elementach obwodu dane są w postaci

$$U_C = Z_C I_C = 106.6e^{j26.6^\circ}$$

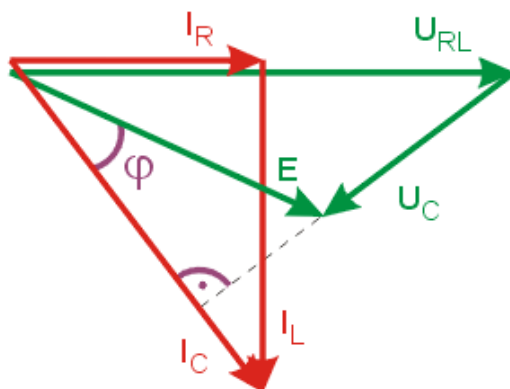
$$U_{RL} = Z_{RL} I_C = 44.75e^{j161.6^\circ}$$

Prądy cewki i rezystora obliczone z prawa Ohma równają się

$$I_L = \frac{U_{RL}}{Z_L} = 44,75e^{j71,6^\circ}$$

$$I_R = \frac{U_{RL}}{R} = 44,75e^{j161,6^\circ}$$

Na rys. 3.3 przedstawiono wykres wektorowy prądów i napięć w obwodzie.



Rys. 3.3. Wykres wektorowy prądów i napięć w obwodzie z rys. 3.2



Poszczególne rodzaje mocy wydzielonej w obwodzie równają się:

- Moc pozorna wydawana przez źródło

$$S = E \cdot I_C^* = 6330e^{-j71,6^\circ} = (1998 - j6000) \text{ V} \cdot \text{A}$$

- Moc czynna rezystora

$$P_R = |I_R|^2 R = 1998 \text{ W}$$

- Moc bierna cewki i kondensatora

$$Q_L = \text{Im}(U_{RL} \cdot I_L^*) = 2000 \text{ var}$$

$$Q_C = \text{Im}(U_C \cdot I_C^*) = -8000 \text{ var}$$

Całkowita moc bierna wydzielona na cewce i kondensatorze równa się

$$Q = Q_L + Q_C = -6000 \text{ var}$$

Moc wydzielona na rezystorze oraz cewce i kondensatorze równa się dokładnie mocy dostarczonej przez źródło. Bilans mocy generowanej przez źródło i mocy wydzielonej w odbiorniku jest zatem równy zeru.

3.6 Energia magazynowana w cewce i kondensatorze

Cewka i kondensator traktowane jako idealne elementy obwodowe należą do elementów magazynujących energię elektryczną i z tego punktu widzenia odgrywają ogromną rolę w elektrotechnice

3.6.1 Energia magazynowana w idealnym kondensatorze

Rozpatrzmy kondensator o pojemności C zasilony z generatora napięciowego $u(t)$. Obliczmy energię dostarczoną do tego kondensatora w czasie od t_0 do t . Energia ta może być obliczona jako całka z mocy chwilowej

$$W(t_0, t) = \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau \quad (3.15)$$

Uwzględniając wzór na moc chwilową i dokonując odpowiednich operacji całkowania otrzymujemy

$$W(t_0, t) = \int_{t_0}^t u(\tau) i(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t u(\tau) C \frac{du(\tau)}{d\tau} d\tau = C \int_{u(t_0)}^{u(t)} u du \quad (3.16)$$

Założmy, że czas t_0 jest taką chwilą, w której napięcie $u(t)$ jest zerowe. W takim razie wzór na energię upraszcza się do postaci

$$W(t_0, t) = C \int_0^{u(t)} u du = \frac{1}{2} C u^2(t) \quad (3.17)$$

Zasadniczą cechą kondensatora idealnego jest jego bezstratność, co oznacza, że energia zgromadzona na nim pozostaje w nim zmagazynowana. Zatem kondensator naładowany do napięcia stałego U posiada energię równą

$$W = \frac{1}{2} C U^2 \quad (3.18)$$



Jest to bardzo ważna własność kondensatora, wykorzystywana do magazynowania energii elektrycznej.

3.6.2 Energia magazynowana w idealnej cewce

Rozpatrzmy cewkę o indukcyjności L zasiloną z generatora napięciowego $u(t)$. Obliczmy energię dostarczoną do tej cewki w czasie od t_0 do t . Energia ta, podobnie jak w przypadku kondensatora, może być obliczona jako całka z mocy chwilowej

$$W(t_0, t) = \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau \quad (3.19)$$

Uwzględniając wzór na moc chwilową i dokonując odpowiednich operacji całkowania otrzymujemy

$$W(t_0, t) = \int_{t_0}^t u(\tau) i(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t i(\tau) L \frac{di(\tau)}{d\tau} d\tau = L \int_{u(t_0)}^{u(t)} i di \quad (3.20)$$

Założmy, że czas t_0 jest taką chwilą, w której prąd cewki $i(t)$ jest zerowy. W takim razie wzór na energię upraszcza się do postaci

$$W(t_0, t) = L \int_0^{u(t)} i di = \frac{1}{2} Li^2(t) \quad (3.21)$$

Zasadniczą cechą cewki idealnej jest jej bezstratność, co oznacza, że energia dostarczona do niej pozostaje w niej zmagazynowana. Zatem cewka, przez którą przepływa prąd stały I posiada energię równą

$$W = \frac{1}{2} LI^2 \quad (3.22)$$



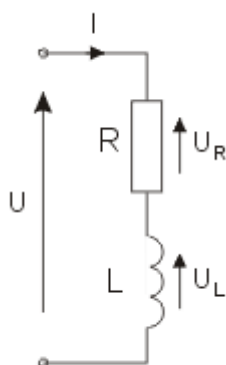
W odróżnieniu od kondensatora, w którym energia związana była z napięciem między okładkami (ładunkiem) energia cewki jest uzależniona od prądu (strumienia magnetycznego). Stąd przyjmuje się, że kondensator magazynuje energię w polu elektrycznym a cewka w polu magnetycznym.

3.7 Rzeczywiste modele cewki i kondensatora

W dotychczasowych rozważaniach traktowaliśmy cewkę i kondensator jako elementy idealne, posiadające tylko jedną cechę: indukcyjność w przypadku cewki i pojemność w przypadku kondensatora. Bardziej realistyczne modele tych elementów wymagają uwzględnienia ich stratności, którą możemy zamodelować przy pomocy rezystancji.

3.7.1 Cewka rzeczywista

W przypadku cewki rzeczywistej zbudowanej z wielu zwojów drutu (zwykle miedzianego) naturalny model wymaga uwzględnienia rezystancji zwojów. Najczęściej przyjmuje się model szeregowy cewki, przedstawiony na rys. 3.4, w którym indukcyjność i rezystancja tworzą połączenie szeregowe.



Rys. 3.4. Szeregowy model cewki rzeczywistej

Cewkę rzeczywistą charakteryzuje jej dobroć Q_L definiowana jako stosunek maksymalnej energii zgromadzonej w polu magnetycznym do energii rozproszonej w rezystancji w ciągu okresu T

$$Q_L = 2\pi \frac{W_{L\max}}{W_R(T)} \quad (3.23)$$

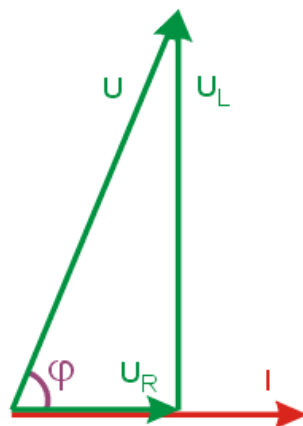
Uwzględniając zależności energetyczne obowiązujące dla cewki i rezystora można łatwo udowodnić, że wzór powyższy dla modelu szeregowego cewki upraszcza się do postaci

$$Q_L = \frac{\omega L}{R} \quad (3.24)$$

Mnożąc licznik i mianownik tej zależności przez moduł prądu (wspólnego dla obu elementów) wzór na dobroć można wyrazić jako stosunek modułu napięcia na indukcyjności do modułu napięcia na rezystancji

$$Q_L = \frac{|U_L|}{|U_R|} \quad (3.25)$$

Jeśli uwzględnimy wykres wektorowy prądów i napięć dla szeregowego modelu cewki (rys. 3.5) otrzymamy następującą zależność



Rys.3.5. Wykres wektorowy dla modelu szeregowego cewki

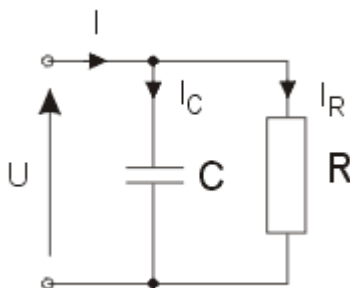


$$Q_L = \operatorname{tg} \varphi \quad (3.26)$$

Dobroć obwodu jest więc równa tangensowi kąta przesunięcia fazowego między wektorem prądu i napięcia na cewce. W przypadku cewki idealnej kąt fazowy jest równy 90° (napięcie na rezystorze szeregowym dąży do zera), stąd taka cewka ma dobroć nieskończoną.

3.7.2 Kondensator rzeczywisty

Model kondensatora rzeczywistego powinien uwzględniać naturalną upływność izolacji międzyokładkowej (skończoną rezystancję izolacji). Naturalny sposób uwzględnienia tego prądu to przyjęcie modelu równoległego, w którym na całkowity prąd kondensatora składa się prąd pojemności C oraz konduktancji G jak to przedstawiono na rys. 3.6.



Rys. 3.6. Równoległy model kondensatora rzeczywistego

Kondensator rzeczywisty charakteryzuje jego dobroć Q_C definiowana jako stosunek maksymalnej energii pola elektrycznego kondensatora do energii rozproszonej w rezystancji w ciągu okresu T

$$Q_C = 2\pi \frac{W_{C \max}}{W_R(T)} \quad (3.27)$$

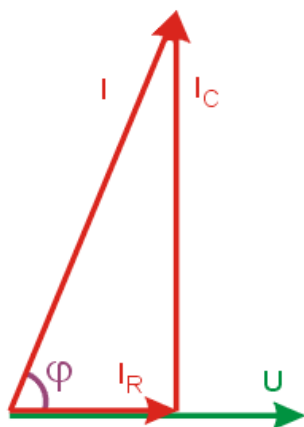
Uwzględniając zależności energetyczne obowiązujące dla kondensatora i rezystora można łatwo udowodnić, że wzór powyższy dla modelu równoległego kondensatora upraszcza się do postaci

$$Q_c = \frac{\omega C}{G} = \omega CR \quad (3.28)$$

Dobroć kondensatora mierzona w modelu równoległym jest tym większa im mniejsza jest jego upływność (większa rezystancja), a więc odwrotnie niż dla modelu szeregowego cewki. Mnożąc licznik i mianownik tej zależności przez moduł napięcia (wspólnego dla obu elementów) wzór na dobroć można wyrazić jako stosunek modułu prądu pojemnościowego do modułu prądu upływnościowego rezystancji

$$Q_c = \frac{|I_C|}{|I_R|} \quad (3.29)$$

Jeśli uwzględnimy wykres wektorowy prądów i napięć dla równoległego modelu kondensatora (rys. 3.7) otrzymamy następującą zależność



Rys. 3.7. Wykres wektorowy dla modelu równoległego kondensatora

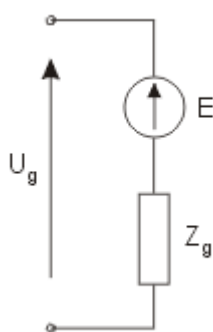


$$Q_C = \operatorname{tg} \varphi \quad (3.30)$$

Dobroć obwodu jest więc równa tangensowi kąta przesunięcia fazowego między wektorem wypadkowym prądu i napięcia na kondensatorze. W przypadku kondensatora idealnego kąt fazowy jest równy 90° (wartość prądu upływnościowego dąży do zera), stąd taki kondensator ma dobroć nieskończoną.

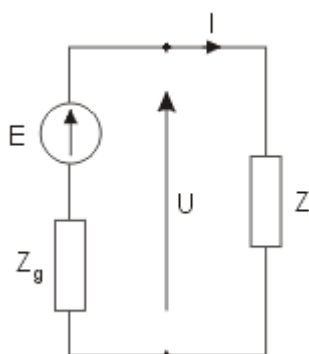
3.8 Dopasowanie odbiornika do źródła

Rzeczywiste źródło energii elektrycznej można przedstawić w postaci szeregowego połączenia idealnego źródła napięcia E oraz impedancji wewnętrznej źródła Z_g jak to przedstawiono na rys. 3.8



Rys. 3.8. Model rzeczywistego źródła napięciowego generatora

Rozważmy elementarny obwód złożony z rzeczywistego źródła napięcia oraz impedancji odbiornika Z jak to przedstawiono na rys. 3.9.



Rys. 3.9. Rzeczywiste źródło napięcia obciążone impedancją Z

Przyjmijmy ogólny model impedancji wewnętrznej źródła w postaci

$$Z_g = R_g + jX_g \quad (3.31)$$

Podobnie założymy, że impedancję odbiornika stanowi połączenie szeregowe rezystancji R oraz reaktancji X , to jest

$$Z = R + jX \quad (3.32)$$

Dopasowanie odbiornika do generatora rozumiemy jako dobór takiej impedancji odbiornika, przy której odbiornik pobiera ze źródła maksymalną moc czynną. Z analizy obwodu przedstawionego na rys. 3.9 wynika, że moc P odbiornika jest określona zależnością

$$P = |I|^2 R = \frac{|E|^2}{|Z_g + Z|^2} R = \frac{|E|^2 R}{(R_g + R)^2 + (X_g + X)^2} \quad (3.33)$$

Przy ustalonej wartości rezystancji odbiornika wyrażenie powyższe osiąga maksimum dla

$$X = -X_g \quad (3.34)$$

Znak minus oznacza, że reaktancja odbiornika powinna mieć charakter odwrotny do reaktancji generatora. Przy indukcyjnym charakterze impedancji źródła, odbiornik powinien mieć charakter pojemnościowy.

Po uwzględnieniu tej zależności wyrażenie na moc przyjmie uproszczoną postać

$$P = \frac{|E|^2 R}{(R_g + R)^2} \quad (3.35)$$

Wydzielenie maksymalnej mocy czynnej na rezystorze wymaga, aby pochodna funkcji mocy względem rezystancji R równała się zeru, czyli

$$\frac{dP(R)}{dR} = 0 \quad (3.36)$$

czyli

$$\frac{(R_g + R)^2 - 2R(R_g + R)}{(R_g + R)^4} |E| = 0 \quad (3.37)$$

Równanie powyższe jest spełnione dla wartości rezystancji obciążenia równej rezystancji źródła, czyli

$$R = R_g \quad (3.38)$$

Można łatwo sprawdzić, że przy takim warunku druga pochodna funkcji mocy względem rezystancji jest ujemna, co oznacza, że mamy do czynienia z maksimum mocy. Ostatecznie stwierdzamy, że warunkiem dopasowania odbiornika do generatora ze względu na moc czynną jest

$$Z = Z_g^* = R_g - jX_g \quad (3.39)$$

Łatwo jest pokazać, że przy spełnieniu powyższego warunku na impedancji odbiornika wydzieli się maksymalna moc czynna $P_{\max}$ równa

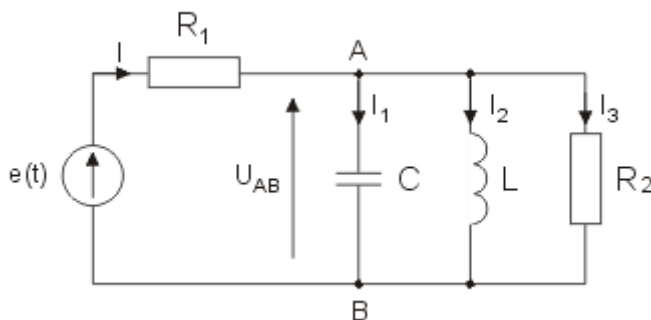
$$P_{\max} = \frac{|E|^2}{4R_g} \quad (3.40)$$

Biorąc pod uwagę, że w obwodzie istnieją dwie identyczne rezystancje (odbiornika i generatora), przez które przepływa identyczny prąd moc maksymalna odbiornika stanowi 50% całkowitej mocy wydzielanej przez źródło idealne.

Zadania sprawdzające

Zadanie 3.1

Sporządzić bilans mocy w obwodzie przedstawionym na rys. 3.10. Przyjąć następujące wartości elementów: $e(t) = 50\sqrt{2} \sin(\omega t) \text{ V}$, $\omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $L = 10 \text{ H}$, $C = 0,1 \text{ F}$, $R_1 = 15 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$.



Rys. 3.10. Schemat obwodu do zadania 3.1

Rozwiązanie

Wartości symboliczne elementów obwodu:

$$\omega = 1$$

$$E = 50$$

$$Z_L = j\omega L = j10$$

$$Z_C = 1/j\omega C = -j10$$

Impedancje obwodu:

$$\frac{1}{Z_{AB}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = 0,1$$

$$Z_{AB} = 10$$

$$Z = Z_{AB} + R_1 = 25$$

Prądy i napięcia w obwodzie:

$$I = E/Z = 2$$

$$U_{AB} = IZ_{AB} = 20$$

$$I_1 = \frac{U_{AB}}{Z_C} = j2$$

$$I_2 = \frac{U_{AB}}{Z_L} = -j2$$

$$I_3 = \frac{U_{AB}}{R_2} = 2$$

Moc wydawana przez źródło

$$S_E = EI^* = 50 \cdot 2 = 100 + j0$$

Moce elementów

$$P_{R_1} = |I|^2 R_1 = 60W$$

$$P_{R_2} = |I_3|^2 R_2 = 40W$$

$$Q_L = |I_2|^2 \omega L = 40 \text{ var}$$

$$Q_C = -|I_1|^2 \frac{1}{\omega C} = -40 \text{ var}$$

Moc całkowita odbiornika

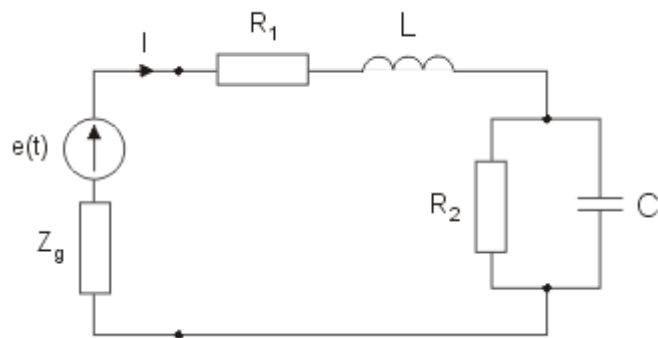
$$S_{odb} = P_{R_1} + P_{R_2} + jQ_L + jQ_C = 100 + j0$$

Moc odbiornika jest dokładnie równa mocy źródła.

Zadanie 3.2

Dobrać tak wartości rezystancji R_1 i indukcyjności L aby w odbiorniku obwodu z rys. 3.11 wydzielila się maksymalna moc czynna. Obliczyć tę moc. Dane liczbowe elementów obwodu:

$$e(t) = 100\sqrt{2} \sin t \text{ V}, \quad Z_g = 50\Omega, \quad X_C = 20\Omega, \quad R_2 = 20\Omega.$$



Rys. 3.11. Schemat obwodu do zadania 3.2

Rozwiązanie

Impedancja całkowita odbiornika

$$Z = R_1 + jX_L + \frac{-j20 \cdot 20}{20 - j20} = R_1 + jX_L + 10 - j10$$

Wobec zerowej wartości części urojonej impedancji generatora $X_g = 0$ część urojona impedancji odbiornika musi być także równa zero, czyli

$$\text{Im}(Z) = 0 \rightarrow X_L = 10\Omega$$

Dopasowanie odbiornika do generatora pod względem mocy czynnej wymaga, aby

$$\text{Re}(Z) = \text{Re}(Z_g)$$

$$R_1 + 10 = 50 \rightarrow R_1 = 40\Omega$$

Prąd w obwodzie

$$I = \frac{E}{Z + Z_g} = \frac{100}{50 + 50} = 1$$

Moc wydawana przez źródło

$$S_E = EI^* = 100$$

Moc odbiornika

$$P = |I|^2 R = 50$$

Na odbiorniku w warunkach dopasowania mocy wydziela się połowa mocy źródła. Druga połowa wydziela się na rezystancji źródła.

Lekcja 4. Metody analizy złożonych obwodów RLC w stanie ustalonym przy wymuszeniu sinusoidalnym

Wstęp

Analiza obwodów w stanie ustalonym przy wymuszeniu sinusoidalnym tylko w najprostszym przypadku połączenia szeregowego lub równoległego elementów jest zagadnieniem prostym, nie wymagającym rozwiązywania układu równań. W większości bardziej złożonych obwodów należy liczyć się z rozwiązaniem wielu równań algebraicznych typu zespolonego.

Lekcja czwarta poświęcona będzie skutecznym metodom analizy złożonych obwodów RLC w stanie ustalonym przy wymuszeniach sinusoidalnych. Podstawowym założeniem przy wymuszeniu sinusoidalnym jest przyjęcie opisu symbolicznego elementów obwodu, zgodnie z którym cewka opisana jest impedancją zespoloną $Z_L = j\omega L$ a kondensator impedancją $Z_C = -j\frac{1}{\omega C}$. Źródło sinusoidalne zastępuje się jego wartością skuteczną zespoloną, określaną według zasad podanych w lekcji drugiej.

Znanych jest wiele metod umożliwiających analizę dowolnie złożonych obwodów elektrycznych, spośród których omówimy metodę klasyczną, opartą na prawach Kirchhoffa, zastosowaniu twierdzenia Thevenina i Nortona oraz metodę węzłową i oczkową. W przypadku wielu wymuszeń o różnych częstotliwościach niezbędne jest zastosowanie tak zwanej zasady superpozycji obowiązującej dla obwodów liniowych, wprowadzonej w końcowej fazie lekcji.



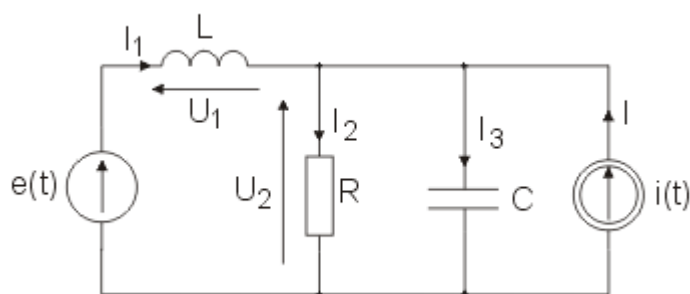
4.1. Metoda równań Kirchhoffa

W metodzie tej wykorzystuje się w bezpośredniej formie prawo prądowe i napięciowe Kirchhoffa uzupełnione o równania symboliczne opisujące poszczególne elementy obwodu. W efekcie zastosowania praw Kirchhoffa otrzymuje się układ równań algebraicznych o zespolonych współczynnikach. Jeśli założymy, że obwód posiada b gałęzi i n węzłów to w równaniach opisujących obwód wykorzystuje się $(n-1)$ równań pochodzących z prawa prądowego Kirchhoffa. Pozostałe $(b-n+1)$ równań wynika z prawa napięciowego Kirchhoffa dla $(b-n+1)$ oczek niezależnych (dowolnie wybranych) w obwodzie.

Jak z powyższych rozważań wynika w metodzie klasycznej wykorzystującej bezpośrednio prawa Kirchhoffa istnieje potrzeba rozwiązania układu b równań z b niewiadomymi. Jest to więc metoda złożona obliczeniowo, zwłaszcza jeśli weźmie się pod uwagę, że wszystkie równania są zespolone. W efekcie metodę tę stosuje się głównie w przypadku obwodów o małej liczbie elementów. Metodę zilustrujemy przykładem liczbowym obliczania prądów i napięć w obwodzie przedstawionym na rys. 4.1.

Przykład 4.1

Stosując równania Kirchhoffa należy obliczyć wszystkie prądy i napięcia w obwodzie przedstawionym na rys. 4.1. Przyjąć następujące wartości parametrów obwodu: $R = 2\Omega$, $C = 0,5F$, $L = 1H$, $e(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t) V$, $i(t) = 5 \sin(\omega t - 45^\circ) A$, $\omega = 1 \frac{rad}{s}$.



Rys. 4.1. Schemat obwodu do przykładu 4.1

Rozwiązanie

Przy sinusoidalnym wymuszeniu zastosujemy podejście symboliczne, zgodnie z którym przebiegi czasowe są zastąpione wartościami zespolonymi. W przypadku źródeł przyjmuje się: $E = 10e^{j0} = 10$, $I = \frac{5}{\sqrt{2}}e^{-j45^\circ}$. Impedancja cewki jest równa $Z_L = j\omega L = j1$, a impedancja kondensatora $Z_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j2$.

Przy oznaczeniach prądów i napięć jak na rys. 4.1 z praw Kirchhoffa wynikają następujące równania prądowe i napięciowe

$$E - Z_L I_1 - R I_2 = 0$$

$$I + I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$I_2 R - Z_C I_3 = 0$$

Po uporządkowaniu równań i wstawieniu wartości liczbowych otrzymuje się układ 3 równań zespolonych w postaci

$$\begin{aligned} jI_1 + 2I_2 &= 10 \\ I_1 - I_2 - I_3 &= -\frac{5}{\sqrt{2}}e^{-j45^\circ} \\ 2I_2 + j2I_3 &= 0 \end{aligned}$$

W obwodzie wyróżnione zostały 3 gałęzie, w których obliczany jest prąd, stąd jego pełny opis zawiera 3 niezależne równania. Rozwiązanie tych równań prowadzi do wyniku

$$\begin{aligned} I_1 &= 10 + j5 = 11,18e^{j26,5^\circ} \\ I_2 &= 7,5 - j5 = 9,01e^{-j33,7^\circ} \\ I_3 &= 5 + j7,5 = 9,01e^{j56,3^\circ} \end{aligned}$$

Wartości chwilowe prądów są zatem wyrażone w postaci następujących funkcji sinusoidalnych

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 11,18\sqrt{2} \sin(\omega t + 26,5^\circ) \\ i_2(t) &= 9,01\sqrt{2} \sin(\omega t - 33,7^\circ) \\ i_3(t) &= 9,01\sqrt{2} \sin(\omega t + 56,3^\circ) \end{aligned}$$

Wykorzystując prawo Ohma otrzymuje się następujące wartości napięć na elementach pasywnych

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_L I_1 = 11,18e^{j116,5^\circ} \\ U_2 &= R I_2 = 18,02e^{-j33,7^\circ} \end{aligned}$$

Wartości chwilowe napięć wyrażone są w postaci funkcji sinusoidalnych

$$u_1(t) = 11,18\sqrt{2} \sin(\omega t + 116,5^\circ)$$

$$u_2(t) = 18,02\sqrt{2} \sin(\omega t - 33,7^\circ)$$

Łatwo sprawdzić, że bilans prądów i napięć w obwodzie jest spełniony. Mianowicie w przypadku prądów (jeden węzeł niezależny)

$$I + I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

oraz napięć (dwa oczka niezależne)

$$E - U_1 - U_2 = 0$$

$$I_2 R - Z_C I_3 = 0$$

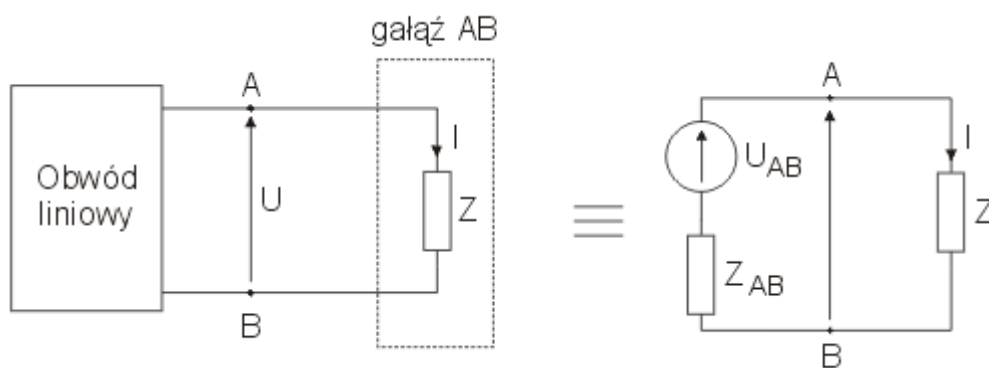
4.2. Metoda oparta na twierdzeniu Thevenina

Jednym z ważniejszych twierdzeń w teorii obwodów jest twierdzenie Thevenina. Pozwala ono zastąpić złożony obwód elektryczny o dowolnej strukturze i wartościach elementów, przez obwód prosty będący połączeniem szeregowym jednej impedancji zastępczej oraz źródła napięciowego. Umożliwia znaczne uproszczenie struktury obwodu, a w następstwie w bardzo prosty sposób wyznaczyć prąd lub napięcie jednej wybranej gałęzi obwodu.

Twierdzenie Thevenina

Dowolny, aktywny obwód liniowy można zastąpić od strony wybranych zacisków gałęzi AB uproszczonym obwodem równoważnym, złożonym z szeregowego połączenia jednego idealnego źródła napięcia i impedancji zastępczej obwodu. Wartość źródła zastępczego oblicza się na podstawie analizy obwodu oryginalnego jako napięcie panujące na zaciskach AB po odłączeniu gałęzi AB. Impedancja zastępcza widziana z zacisków AB dotyczy obwodu po wyłączeniu gałęzi AB i po zwarcu wszystkich źródeł napięcia oraz rozwarciu źródeł prądu.

Na rys. 4.2 przedstawiono sposób transformacji obwodu zgodnie z twierdzeniem Thevenina.



Rys. 4.2. Transformacja obwodu zgodnie z twierdzeniem Thevenina

Prąd I występujący w gałęzi AB obwodu oryginalnego jest równy prądowi I w tej samej gałęzi obwodu uproszczonego. Napięcie U_{AB} występujące na rysunku reprezentuje źródło zastępcze, natomiast impedancja Z_{AB} jest impedancją zastępczą obwodu. Przy założeniu, że gałąź AB w której obliczamy prąd reprezentowana jest przez impedancję Z , prąd tej gałęzi można obliczyć korzystając z prawa napięciowego Kirchhoffa

$$U_{AB} - I(Z + Z_{AB}) = 0 \quad (4.1)$$

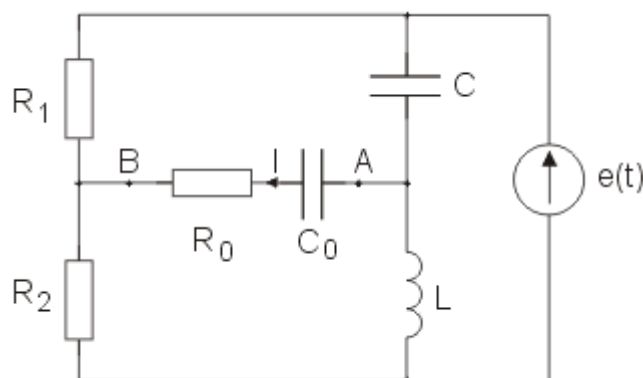
z którego wynika wyrażenie na prąd gałęzi w następującej postaci

$$I = \frac{U_{AB}}{Z + Z_{AB}} \quad (4.2)$$

Metoda Thevenina w większości przypadków znakomicie upraszcza analizę obwodu. Jest szczególnie użyteczna w przypadkach, w których trzeba wyznaczyć tylko jeden prąd w obwodzie, gdyż można dokonać tego bez konieczności rozwiązywania układu równań algebraicznych lub przy znacznej redukcji liczby tych równań.

Przykład 4.2

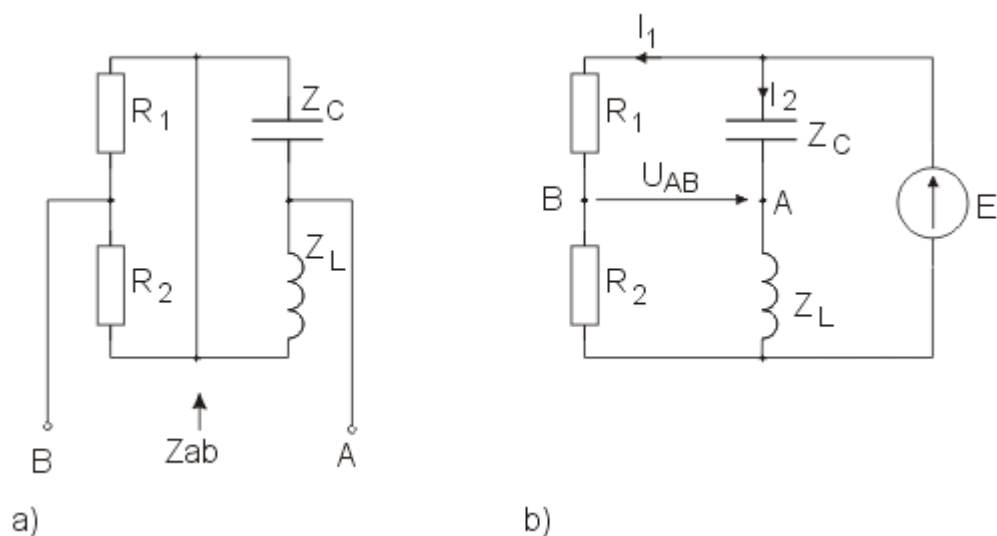
Korzystając z twierdzenia Thevenina wyznaczyć prąd I w gałęzi AB obwodu mostka przedstawionego na rys. 4.3, jeśli $e(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t) \text{ V}$, $R_0 = 7,5\Omega$, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 5\Omega$ a reaktancje cewki i kondensatora są równe odpowiednio $X_L = \omega L = 5\Omega$ oraz $X_C = 1/\omega C = 10\Omega$, $X_{C0} = 1/\omega C_0 = 5\Omega$.



Rys. 4.3. Schemat obwodu do przykładu 4.2

Rozwiązanie

Na rys. 4.4a przedstawiono schemat obwodu do wyznaczenia impedancji zastępczej Thevenina.



Rys. 4.4. Postaci obwodu do wyznaczania a) impedancji zastępczej Thevenina,
b) napięcia źródła zastępczego

Łatwo pokazać, że impedancja zastępcza tego obwodu jest równa

$$Z_{AB} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{Z_L Z_C}{Z_L + Z_C} = \frac{5 \cdot 5}{5 + 5} + \frac{j5 \cdot (-j10)}{j5 - j10} = 2,5 + j10$$

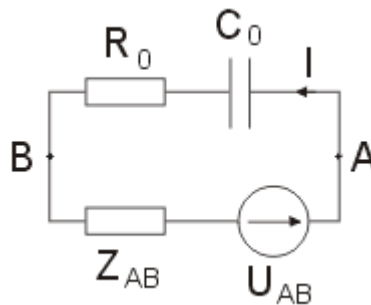
Rys. 4.4b przedstawia obwód do obliczenia wartości źródła zastępczego U_{AB} w schemacie zastępczym Thevenina. Obliczając kolejno prądy

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_2} = 1$$

$$I_2 = \frac{E}{jX_L - jX_C} = 2j$$

napięcie U_{AB} określa się ze wzoru

$$U_{AB} = R_1 I_1 - Z_C I_2 = -15$$



Rys. 4.5 Schemat obwodu zastępczego wynikającego z twierdzenia Thevenina

Wykorzystując obwód zastępczy Thevenina z rys. 4.5 i prawo napięciowe Kirchhoffa, wartość skuteczną zespoloną prądu I określa się ze wzoru

$$I = \frac{U_{AB}}{Z_{AB} + R_0 - jX_{C0}} = \frac{-15}{2,5 + j10 + 7,5 - j5} = \frac{-15}{11,18e^{j26}} = -1,34e^{-j26^\circ}$$

Wartości chwilowe prądu $i(t)$ wyznaczane są z zależności

$$i(t) = -1,34 \sin(\omega t - 26^\circ) \text{ A}$$

Zauważmy, że zastosowanie twierdzenia Thevenina umożliwiło rozwiązanie obwodu względem jednego wybranego prądu bez konieczności rozwiązania układu równań algebraicznych.

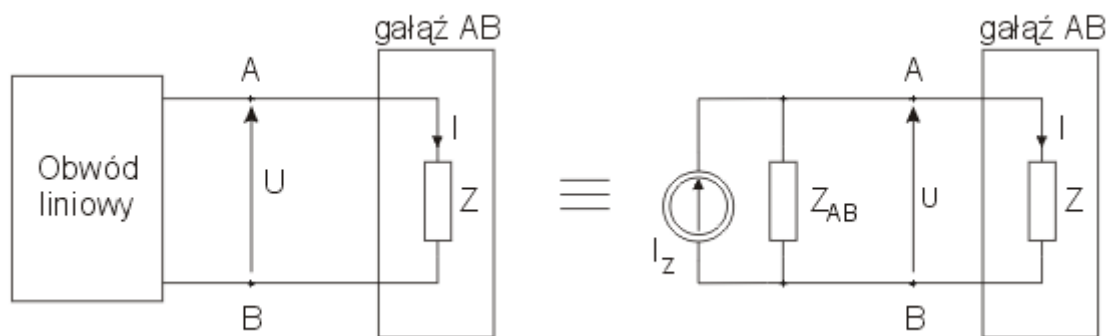
4.3. Metoda oparta na twierdzeniu Nortona

Pozwala ono zastąpić złożony obwód elektryczny o dowolnej strukturze i wartościach elementów, przez obwód prosty będący połączeniem równoległym jednej impedancji zastępczej oraz idealnego źródła prądowego.

Twierdzenie Nortona

Dowolny aktywny obwód liniowy można od strony wybranych zacisków AB zastąpić obwodem równoważnym, złożonym z równoległego połączenia idealnego źródła prądu i impedancji zastępczej obwodu. Wartość źródła zastępczego oblicza się w obwodzie oryginalnym jako prąd zwarcia gałęzi AB. Impedancja zastępcza widziana z zacisków AB dotyczy obwodu po wyłączeniu gałęzi AB i po zwarcu wszystkich źródeł napięcia oraz rozwarciu źródeł prądu i jest identyczna z impedancją zastępczą w twierdzeniu Thevenina.

Rys. 4.6 przedstawia schemat transformacji obwodu zgodnie z twierdzeniem Nortona.



Rys. 4.6. Schemat transformacji obwodu według twierdzenia Nortona

Prąd I oraz napięcie U występujące w gałęzi AB obwodu oryginalnego są równe odpowiednio prądowi I oraz napięciu U w tej samej gałęzi obwodu uproszczonego. Źródło prądowe I_z występujące na rysunku reprezentuje źródło zastępcze, natomiast impedancja Z_{AB} jest impedancją zastępczą obwodu. Przy założeniu, że gałąź AB reprezentowana jest przez impedancję Z , napięcie tej gałęzi oblicza się z prawa prądowego Kirchhoffa

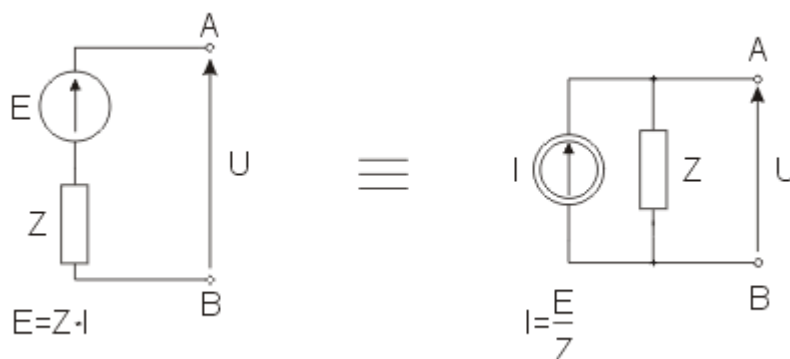
$$I_z - U \left(\frac{1}{Z} + \frac{1}{Z_{AB}} \right) = 0, \text{ które pozwala wyrazić poszukiwane napięcie gałęzi w postaci}$$

$$U = \frac{I_z}{1/Z + 1/Z_{AB}} \quad (4.3)$$

Znajomość napięcia pozwala wyznaczyć na podstawie prawa Ohma prąd gałęzi korzystając z zależności $I = U/Z$. Podobnie jak metoda Thevenina, zastosowanie twierdzenia Nortona umożliwia obliczenie prądu i napięcia tylko jednej gałęzi obwodu. Zwykle z punktu widzenia obliczeniowego wygodniejsze jest użycie metody Thevenina.

4.4. Równoważność twierdzenia Thevenina i Nortona

Twierdzenie Thevenina i Nortona pozwalają wyznaczyć uproszczone schematy zastępcze tego samego układu elektrycznego z punktów AB obwodu wyjściowego. Oba schematy uproszczone stanowią więc obwody zastępcze równoważne sobie, co oznacza, że prąd i napięcie w gałęzi AB, która nie uległa zmianie w wyniku transformacji, są takie same. Oznacza to, że gałąź szeregową zawierającą idealne źródło napięcia E i impedancję Z może być bez zmiany prądu w obwodzie zewnętrznym zastąpiona gałęzią równoległą zawierającą idealne źródło prądowe I oraz impedancję Z , jak to zilustrowano na rys. 4.7.



Rys. 4.7. Równoważność obwodów zastępczych Thevenina i Nortona



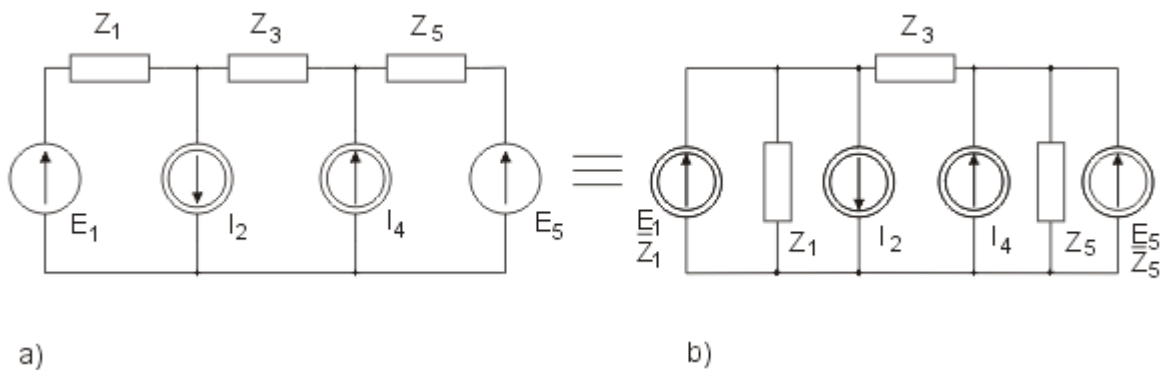
Wzajemne relacje między wartościami źródła prądu i napięcia określa wzór

$$I = \frac{U}{Z} \quad (4.4)$$

przy zamianie gałęzi szeregowej na równoległą oraz

$$U = ZI \quad (4.5)$$

przy zamianie gałęzi równoległej na szeregową. Impedancja Z w obu obwodach zastępczych pozostaje taka sama. Dla zilustrowania korzyści płynących z równoważności obu twierdzeń rozpatrzmy obwód z rys. 4.8a zawierający zarówno źródła prądu jak i napięcia. Zastosowanie równoważności twierdzenia Thevenina i Nortona pozwala uzyskać obwód zawierający wyłącznie jeden typ źródeł (prądowych) jak to przedstawiono na rys. 4.8.



Rys. 4.8. Przykład transformacji obwodu wykorzystującej równoważność obwodów zastępczych Thevenina i Nortona: a) obwód oryginalny zawierający źródła prądu i napięcia, b) obwód po transformacji zawierający wyłącznie źródła prądowe

4.5. Metoda potencjałów węzłowych

Metoda potencjałów węzłowych, zwana również **metodą węzłową**, jest jedną z najogólniejszych i najczęściej stosowanych metod, pozwalających wyznaczyć prądy wszystkich gałęzi występujących w obwodzie. Jako zmienne przyjmuje się w niej potencjały poszczególnych węzłów obwodu określone względem jednego arbitralnie wybranego węzła uznanego za **węzeł odniesienia** („masy”), którego potencjał przyjmuje się za równy zero. Liczba równań w tej metodzie jest równa liczbie węzłów niezależnych a więc znacznie mniejsza niż w metodzie wykorzystującej bezpośrednio układ równań otrzymanych w wyniku zastosowania praw Kirchhoffa.

Metoda węzłowa wynika bezpośrednio z równań prądowych Kirchhoffa napisanych dla wszystkich węzłów niezależnych w obwodzie. Prąd każdej gałęzi obwodu jest wyrażany

za pośrednictwem potencjałów węzłowych. Zostało wykazane, że każdy obwód liniowy RLC może być opisany równaniem macierzowym potencjałów węzłowych o postaci

$$\mathbf{YV} = \mathbf{I}_{zr} \quad (4.6)$$

w której $\mathbf{Y}$ jest macierzą węzłową o wymiarach $N \times N$, gdzie N jest liczbą węzłów niezależnych w obwodzie, $\mathbf{V}$ jest wektorem niezależnych potencjałów węzłowych o wymiarze N a $\mathbf{I}_{zr}$ jest wektorem prądów źródłowych stanowiących wymuszenie. Macierz węzłowa $\mathbf{Y}$ określona jest w postaci

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \dots & Y_{NN} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

a wektory $\mathbf{V}$ oraz $\mathbf{I}_{zr}$ dane są jak następuje

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_N \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{I}_{zr} = \begin{bmatrix} I_{zr1} \\ I_{zr2} \\ \dots \\ I_{zrN} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Elementy Y_{ii} położone na głównej diagonalnej macierzy $\mathbf{Y}$ nazywane są **admitancjami własnymi** węzła i -tego. W przypadku obwodów RLC bez źródeł sterowanych admitancja własna węzła i -tego jest równa sumie admitancji wszystkich gałęzi włączonych w i -tym węzle. Elementy Y_{ij} położone poza główną diagonalną są **admitancjami wzajemnymi** między węzłem i -tym oraz j -tym. Admitancja wzajemna dwu węzłów jest równa admitancji łączącej te węzły wziętej ze znakiem minus. Admitancja wzajemna węzła i -tego oraz j -tego

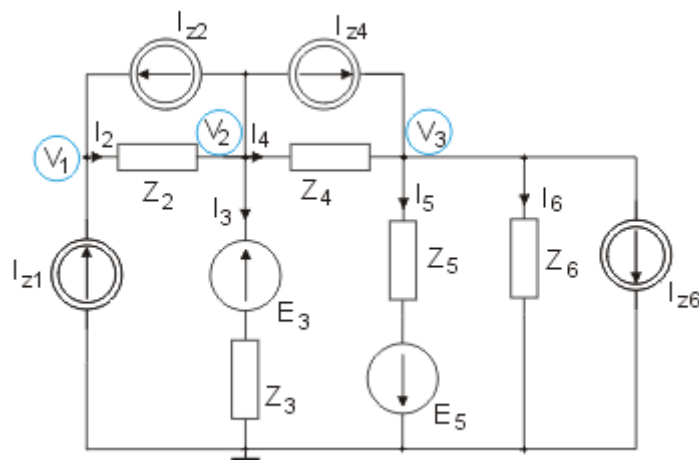
jest taka sama jak węzła j -tego oraz i -tego, tzn. $Y_{ij} = Y_{ji}$. Macierz admitancyjna $\mathbf{Y}$ dla obwodów RLC bez źródeł sterowanych jest więc macierzą symetryczną.

Elementy wektora wymuszeń prądowych $\mathbf{I}_{sr}$ są równe sumie wszystkich prądów źródłowych wpływających do danego węzła, przy czym prąd źródłowy dopływający do węzła bierze się ze znakiem plus a prąd odpływający od węzła ze znakiem minus.

Należy podkreślić, że metoda potencjałów węzłowych dopuszcza istnienie w obwodzie jedynie źródeł wymuszających typu prądowego. Jeśli w obwodzie występują również źródła napięciowe należy je przekształcić w odpowiednie źródła prądowe wykorzystując do tego celu równoważność Thevenina – Nortona (patrz rys. 4.7). Sposób formułowania równań węzłowych zilustrujemy na przykładzie obwodu przedstawionego na rys. 4.9.

Przykład 4.3

Korzystając z przedstawionych reguł formułowania równań węzłowych należy napisać równanie potencjałów węzłowych dla obwodu przedstawionego na rys. 4.9.



Rys. 4.9. Schemat obwodu do przykładu 4.3

Rozwiązanie

Obwód zawiera 3 węzły niezależne: V_1 , V_2 oraz V_3 mierzone względem węzła odniesienia jak to oznaczono na rysunku. Oznaczając admitancje przez Y , gdzie $Y=1/Z$ otrzymuje się macierz potencjałów węzłowych $\mathbf{Y}$ oraz wektor prądów wymuszających $\mathbf{I}_{sr}$ w postaci

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_2 & -Y_2 & 0 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 + Y_4 & -Y_4 \\ 0 & -Y_4 & Y_4 + Y_5 + Y_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_{zr} = \begin{bmatrix} I_{z1} + I_{z2} \\ E_3 Y_3 - I_{z2} - I_{z4} \\ I_{z4} - I_{z6} - E_5 Y_5 \end{bmatrix}$$

Równanie potencjałów węzłowych obwodu przyjmuje postać

$$\mathbf{YV} = \mathbf{I}_{zr},$$

w której $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$.

Na podstawie obliczonych wartości napięć węzłowych obwodu można w prosty sposób korzystając z prawa napięciowego Kirchhoffa dla poszczególnych gałęzi obwodu wyznaczyć prądy gałęziowe. Wystarczy w tym celu zastosować bądź prawo Ohma (jeśli gałąź zawiera jedynie element pasywny) lub równanie napięciowe Kirchhoffa dla gałęzi szeregowej zawierającej źródło napięcia i element pasywny. Przykładowo dla obwodu z rys. 4.9 odpowiednie zależności przyjmują postać

$$I_2 = Y_2(V_1 - V_2)$$

$$I_3 = Y_3(V_2 - E_3)$$

$$I_4 = Y_4(V_2 - V_3)$$

$$I_5 = Y_5(V_3 + E_5)$$

$$I_6 = Y_6 V_3$$

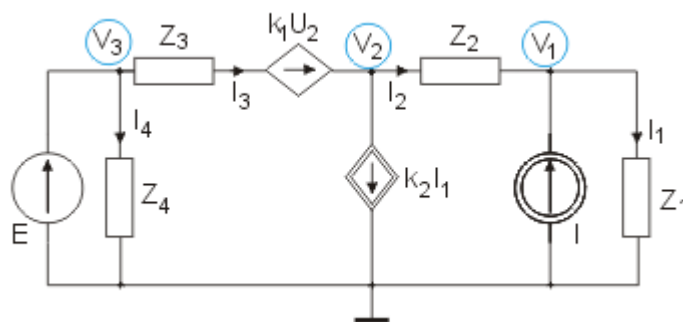
Należy podkreślić, że metoda potencjałów węzłowych wymaga rozwiązania układu N równań, gdzie N oznacza liczbę węzłów niezależnych. Zwykle liczba węzłów jest dużo mniejsza niż liczba elementów obwodu, stąd metoda potencjałów węzłowych jest znacznie efektywniejsza niż metoda klasyczna wykorzystująca bezpośrednio prawa Kirchhoffa.

Reguły tworzenia opisu węzłowego przedstawione powyżej zakładały istnienie jedynie elementów pasywnych RLC oraz źródeł wymuszających typu prądowego. Dzięki takiemu założeniu są one bardzo proste i łatwe w stosowaniu.

W przypadku wystąpienia źródeł sterowanych w obwodzie trudno jest podać formułę ogólną pozwalającą określić zarówno macierz admitancyjną jak i wektor wymuszeń prądowych. Zasada tworzenia opisu admitancyjnego w takim przypadku korzysta bezpośrednio ze stwierdzenia, że opis admitancyjny powstaje jako uporządkowany zbiór równań wynikających z prawa prądowego Kirchhoffa, w których wszystkie prądy gałęziowe zostały wyrażone poprzez potencjały węzłowe i wartości źródeł wymuszających. Macierz admitancyjna $\mathbf{Y}$ wynika wówczas z uporządkowania macierzowego powstałego układu równań. Taką metodę tworzenia równań węzłowych zilustrujemy na przykładzie obwodu przedstawionego na rys. 4.10.

Przykład 4.4

Korzystając z praw prądowych Kirchhoffa wyznaczyć opis admitancyjny obwodu przedstawionego na rys. 4.10.



Rys. 4.10. Schemat obwodu do przykładu 4.4

Rozwiązanie

W obwodzie występują dwa źródła sterowane, z których jedno jest sterowane napięciem $U_2 = (V_2 - V_1)$ a drugie prądem $I_1 = V_1/Z_1$. Biorąc pod uwagę, że napięcie węzła trzeciego jest równe $V_3 = E$, w opisie obwodu przy zastosowaniu metody węzłowej występują jedynie dwa niezależne potencjały węzłowe V_1 i V_2 . Z prawa prądowego Kirchhoffa napisanego dla dwu węzłów o potencjałach V_1 i V_2 wynikają następujące równania

$$I - I_1 + I_2 = 0$$

$$I_3 - k_2 I_1 - I_2 = 0$$

Wyrażając wszystkie prądy gałęziowe przez napięcia węzłowe

$$I_1 = Y_1 V_1$$

$$I_2 = Y_2 (V_2 - V_1)$$

$$I_3 = Y_3 [E - V_2 + k_1 (V_2 - V_1)]$$

i podstawiając je do równań prądowych Kirchhoffa otrzymuje się

$$Y_3 [E - V_2 + k_1 (V_2 - V_1)] - k_2 Y_1 V_1 - Y_2 (V_2 - V_1) = 0$$

$$Y_2 (V_2 - V_1) + I - Y_1 V_1 = 0$$

Porządkując powyższy układ równań i zapisując go w postaci zależności macierzowej otrzymuje się ostatecznie układ równań węzłowych

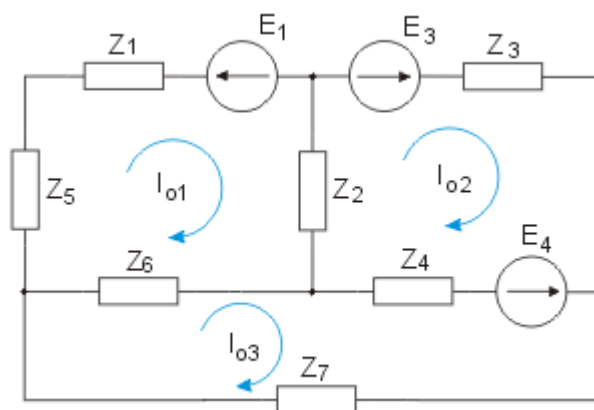
$$\begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_2 + k_1 Y_3 + k_2 Y_1 & Y_2 + Y_3 - k_1 Y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ Y_3 E \end{bmatrix}$$

Jest to układ dwu równań z dwoma nieznanymi napięciami węzłowymi V_1 oraz V_2 . Po rozwiązaniu tych równań można wyznaczyć wszystkie poszukiwane prądy w obwodzie, korzystając z przytoczonych wcześniej równań.

Należy zwrócić uwagę na uproszczenia wynikające z istnienia w obwodzie idealnego źródła napięcia. Źródło takie ustala potencjał określonego węzła (gdy jest włączone względem węzła odniesienia) lub uzależnia potencjał jednego węzła względem drugiego (gdy jest włączone między dwoma węzłami niezależnymi). W obu przypadkach prowadzi to do redukcji liczby równań opisujących obwód.

4.6. Metoda prądów oczkowych

W metodzie prądów oczkowych, zwanej również **metodą oczkową**, wprowadza się prądy oczkowe jako zmienne, czyli prądy przypisane niezależnym oczkom występującym w obwodzie. Przykładowy wybór oczek niezależnych i oznaczenie prądów oczkowych obwodu przedstawiono na rys. 4.11.



Rys. 4.11. Przykład wyboru oczek niezależnych w obwodzie

Oznaczmy w ogólności wektor prądów oczkowych w postaci

$$\mathbf{I}_o = \begin{bmatrix} I_{o1} \\ I_{o2} \\ \dots \\ I_{oN} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

w której I_{ok} oznacza prąd oczkowy k -tego oczka. Dla uzyskania opisu oczkowego wykorzystuje się prawo napięciowe Kirchhoffa napisane dla wszystkich oczek niezależnych obwodu. Następnie wyraża się wszystkie prądy gałęziowe poprzez prądy oczkowe (prąd gałęziowy jest równy sumie lub różnicy prądów oczkowych przeprowadzonych przez daną gałąź) i otrzymuje opis obwodu w postaci układu równań oczkowych

$$\mathbf{Z}\mathbf{I}_o = \mathbf{E} \quad (4.11)$$

gdzie macierz oczkowa $\mathbf{Z}$ oraz wektor napięć wymuszających $\mathbf{E}$ przyjmują postać

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \dots & Z_{NN} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

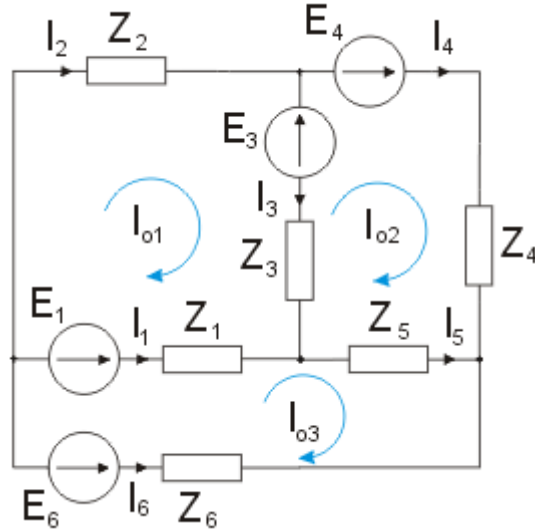
$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ E_N \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Elementy Z_{ii} położone na głównej diagonalnej macierzy $\mathbf{Z}$ nazywamy **impedancjami własnymi** oczka i -tego. Przy założeniu, że wszystkie prądy oczkowe mają identyczny zwrot, dla obwodów RLC bez źródeł sterowanych impedancja własna oczka i -tego jest równa sumie impedancji wszystkich gałęzi występujących w oczku. Elementy Z_{ij} położone poza główną diagonalną są **impedancjami wzajemnymi** między oczkiem i -tym oraz j -tym. Impedancja wzajemna dwu oczek przy identycznym zwrocie wszystkich prądów oczkowych jest równa impedancji wspólnej dla obu oczek wziętej ze znakiem minus. Impedancja wzajemna oczka i -tego oraz j -tego jest taka sama jak oczka j -tego oraz i -tego, tzn. $Z_{ij} = Z_{ji}$. Macierz $\mathbf{Z}$ jest więc macierzą symetryczną.

Element k -ty wektora wymuszeń napięciowych $\mathbf{E}$ jest równy sumie wszystkich napięć źródłowych występujących w k -tym oczku. Przy założonej orientacji oczka napięcie źródłowe dodaje się ze znakiem plus jeśli jego zwrot jest identyczny z tą orientacją a ze znakiem minus jeśli ten zwrot jest przeciwny. Sposób tworzenia opisu oczkowego zilustrujemy na przykładzie obwodu z rys. 4.12.

Przykład 4.5

Dla obwodu przedstawionego na rys. 4.12 napisać równanie prądów oczkowych przy założeniu układu oczek niezależnych jak na rysunku.



Rys. 4.12 Schemat obwodu do przykładu 4.5

Rozwiązanie

Obwód zawiera 3 oczka niezależne, stąd wymiar macierzy oczkowej jest równy 3, podobnie jak długość wektora prądów oczkowych oraz wektora napięć wymuszających. Korzystając z podanej wcześniej reguły tworzenia opisu oczkowego otrzymuje się

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 + Z_3 & -Z_3 & -Z_1 \\ -Z_3 & Z_3 + Z_4 + Z_5 & -Z_5 \\ -Z_1 & -Z_5 & Z_1 + Z_5 + Z_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -E_1 - E_3 \\ E_3 + E_4 \\ E_1 - E_6 \end{bmatrix}$$

Biorąc pod uwagę że obwód zawiera trzy nieznanne prądy oczkowe tworzące wektor prądów $\mathbf{I}_o = [I_{o1} \quad I_{o2} \quad I_{o3}]^T$, równanie oczkowe $\mathbf{Z}\mathbf{I}_o = \mathbf{E}$ stanowi zbiór trzech równań liniowych. Rozwiązanie tego układu równań pozwala określić te zmienne. Znajomość prądów oczkowych pozwala wyznaczyć wszystkie prądy gałęziowe obwodu. Mianowicie

$$I_1 = I_{o3} - I_{o1}$$

$$I_2 = I_{o1}$$

$$I_3 = I_{o1} - I_{o2}$$

$$I_4 = I_{o2}$$

$$I_5 = I_{o3} - I_{o2}$$

$$I_6 = -I_{o3}$$

Metoda prądów oczkowych wymaga rozwiązania układu N równań, gdzie N oznacza liczbę oczek niezależnych. Podobnie jak w metodzie węzłowej liczba oczek jest zwykle dużo mniejsza niż liczba elementów obwodu, stąd metoda prądów oczkowych jest dużo bardziej efektywna niż metoda klasyczna wykorzystująca bezpośrednio prawa Kirchhoffa.

4.7. Zasada superpozycji

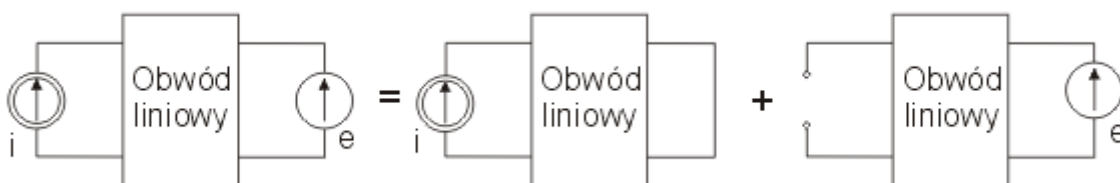
Omówione wcześniej metody analizy symbolicznej stanowią dobry i skuteczny sposób rozwiązania problemu przy istnieniu w obwodzie źródeł sinusoidalnych o tej samej częstotliwości, gdyż dla każdego źródła elementy reaktancyjne LC przedstawiają sobą te same wartości reaktancji. Istotna trudność występuje dopiero przy istnieniu w obwodzie wielu źródeł o różnych częstotliwościach. W takim przypadku nie istnieje pojęcie impedancji wspólnej dla każdego źródła, co uniemożliwia zastosowanie metody symbolicznej. Jedynym rozwiązaniem pozostaje wtedy zastosowanie zasady **superpozycji**. Obowiązuje ona **tylko** dla obwodów liniowych. Jej treść jest następująca.

Zasada superpozycji

Odpowiedź czasowa obwodu elektrycznego liniowego przy warunkach początkowych zerowych jest równa sumie odpowiedzi czasowych na każde wymuszenie z osobna.

Tak ogólnie sformułowana zasada obowiązuje zarówno w stanie ustalonym jak i nieustalonym obwodu. W przypadku analizy stanów ustalonych jej zastosowanie w analizie obwodów polega na rozbiciu danego obwodu o wielu wymuszeniach na wiele obwodów zawierających po jednym wymuszeniu, rozwiązaniu każdego z nich oddzielnie a następnie zsumowaniu odpowiedzi czasowych każdego obwodu. Należy pamiętać przy tym o zasadzie, że eliminowane źródła są zastępowane zwarciami (jeśli źródło jest napięciowe) lub rozwarciem (gdy źródło jest prądowe).

Należy podkreślić, że zgodnie z zasadą superpozycji sumowanie odpowiedzi pochodzących od różnych wymuszeń może odbywać się wyłącznie w dziedzinie czasu. Sumowanie wartości zespolonych od poszczególnych wymuszeń byłoby poważnym błędem, gdyż sugerowałoby istnienie rozwiązania obwodu zawierającego tylko jedną harmoniczną. Ilustrację stosowania zasady superpozycji w analizie obwodów przedstawiono na rys. 4.13.

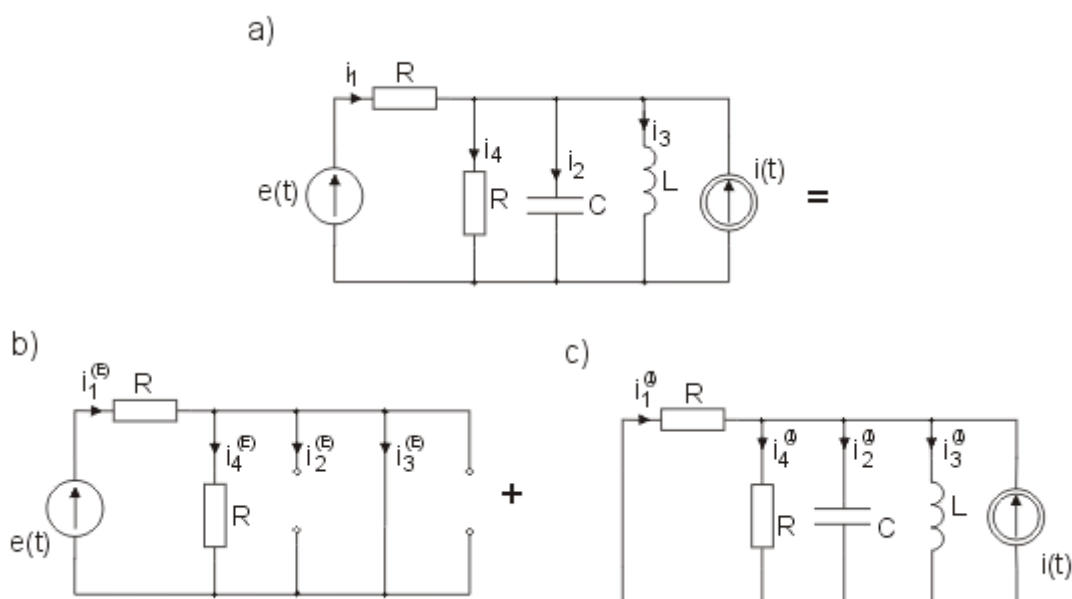


Rys. 4.13. Ilustracja zasady superpozycji w obwodach liniowych



Przykład 4.6

Stosowanie praktycznej zasady superpozycji zostanie zilustrowane na przykładzie obwodu z rys. 4.14a zawierającego dwa źródła, z których jedno jest stałe a drugie sinusoidalne. Należy dokonać analizy obwodu stosując zasadę superpozycji. Przyjąć następujące wartości elementów: $R = 2\Omega$, $L = 2H$, $C = 1F$, $i(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ) A$, $e(t) = 2V$, $\omega = 1 \frac{rad}{s}$.



Rys. 4.14 Schematy obwodów do przykładu 4.6: a) schemat obwodu oryginalnego o dwu źródłach, b) schemat obwodu dla źródła stałego, c) schemat obwodu dla źródła sinusoidalnego

Rozwiązanie

Ze względu na wystąpienie w obwodzie 2 różnych typów wymuszeń (źródło napięciowe stałe i źródło prądowe sinusoidalne) konieczne jest zastosowanie w analizie zasady superpozycji.

Na rys. 4.14c przedstawiono schemat obwodu przy istnieniu źródła sinusoidalnie zmiennego $i(t)$ a na rys. 4.14b obwód dla źródła napięciowego o wartości stałej $e(t) = E$. Wymuszenie stałe może być rozpatrywane również jak sinusoidalne o częstotliwości równej zeru. Biorąc pod uwagę, że dla źródła stałego $\omega = 0$, reaktancja cewki staje się zerowa ($X_L = \omega L = 0$) a reaktancja kondensatora równa nieskończoności ($X_C = 1/\omega C = \infty$). Oznacza to, że z punktu widzenia wymuszenia stałego w stanie ustalonym cewka stanowi zwarcie a kondensator przerwę.

Dla obwodu o wymuszeniu sinusoidalnym wartości reaktancji indukcyjnej i pojemnościowej są odpowiednio równe: $X_L = \omega L = 2\Omega$, $X_C = 1/\omega C = 1\Omega$. Rozwiązując obwód przy wymuszeniu sinusoidalnym otrzymuje się

$$\frac{1}{Z_{RLC}} = \frac{1}{jX_L} + \frac{1}{-jX_C} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = 1 + j0,5$$

$$Z_{RLC} = \frac{1}{1 + j0,5} = 0,8 - j0,4$$

$$U_{RLC}^{(I)} = IZ_{RLC} = 10e^{j45}(0,8 - j0,4) = 8,48 + j2,83 = 8,94e^{j18,4^\circ}$$

$$I_1^{(I)} = -\frac{U_{RLC}}{R} = -4,24 - j1,4 = 4,47e^{-j162^\circ}$$

$$I_2^{(I)} = \frac{U_{RLC}}{-jX_C} = -2,83 + j8,48 = 8,94e^{j108^\circ}$$

$$I_3^{(I)} = \frac{U_{RLC}}{jX_L} = 1,41 - j4,24 = 4,47e^{-j71,6^\circ}$$

$$I_4^{(I)} = \frac{U_{RLC}}{R} = -I_1^{(I)}$$

Wartościom zespolonym prądu towarzyszą następujące postacie rozwiązania w czasie

$$i_1^{(I)}(t) = 4,47\sqrt{2} \sin(\omega t - 162^\circ)$$

$$i_2^{(I)}(t) = 8,94\sqrt{2} \sin(\omega t + 108^\circ)$$

$$i_3^{(I)}(t) = 4,47\sqrt{2} \sin(\omega t - 71,6^\circ)$$

$$i_4^{(I)}(t) = -4,47\sqrt{2} \sin(\omega t - 162^\circ)$$

Rozwiązanie obwodu z rys. 4.14b przy wymuszeniu stałym nie wymaga stosowania metody symbolicznej, gdyż jest to obwód rezystancyjny, dla którego można od razu podać rozwiązanie w czasie. Poszczególne prądy równają się

$$i_1^{(E)}(t) = i_3^{(E)}(t) = \frac{E}{R} = 1$$

$$i_2^{(E)}(t) = i_4^{(E)}(t) = 0$$

Całkowite rozwiązanie na prądy w obwodzie jest sumą rozwiązań obwodu dla wymuszenia sinusoidalnego oraz stałego. Stąd

$$i_1(t) = 1 + 4,47\sqrt{2} \sin(\omega t - 162^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 8,94\sqrt{2} \sin(\omega t + 108^\circ) \text{ A}$$

$$i_3(t) = 1 + 4,47\sqrt{2} \sin(\omega t - 71^\circ) \text{ A}$$

$$i_4(t) = -4,47\sqrt{2} \sin(\omega t - 162^\circ) \text{ A}$$

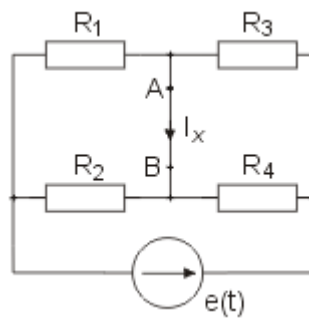
Należy podkreślić, że odpowiednio do zasady superpozycji sumowanie odpowiedzi prądowych na wymuszenie stałe i sinusoidalne mogło odbyć się wyłącznie w dziedzinie czasu.

Zadania sprawdzające

Zadanie 4.1

Stosując metodę Thevenina obliczyć prąd w gałęzi AB obwodu przedstawionego na rys. 4.15.

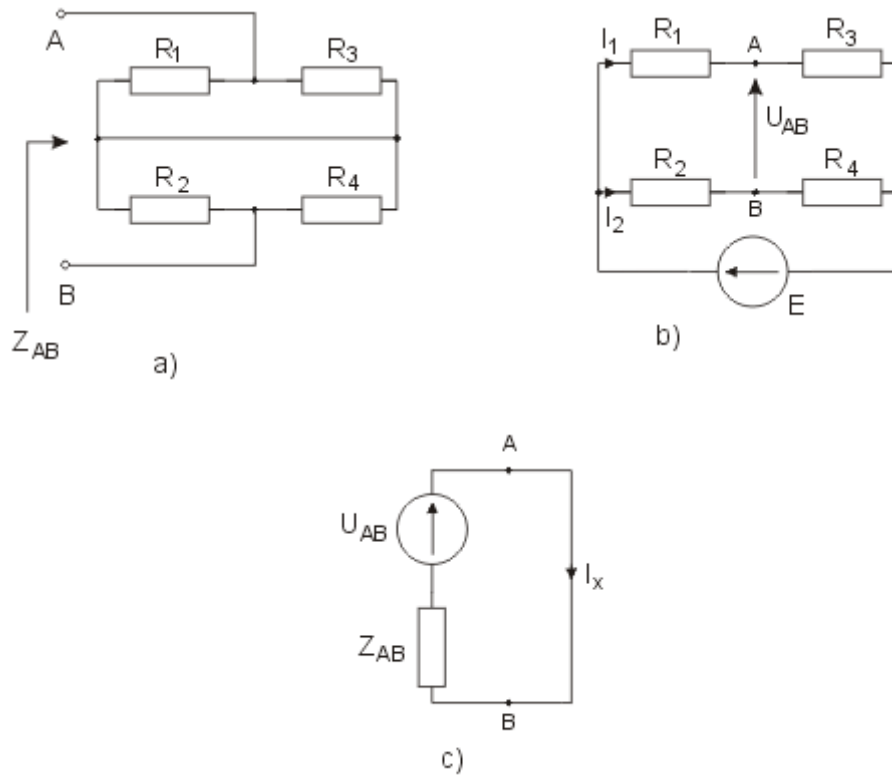
Dane liczbowe elementów: $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 8\Omega$, $R_3 = 2\Omega$, $R_4 = 2\Omega$, $e(t) = 30\sqrt{2} \sin \omega t \text{ V}$.



Rys. 4.15 Schemat obwodu do zadania 4.1

Rozwiązanie

Impedancja z zacisków AB obwodu (rys. 4.16a) jest równa



Rys. 4.16 Schematy obwodu do obliczania: a) impedancji Z_{AB} , b) napięcia U_{AB} , c) prądu I_x

$$Z_{AB} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = 2,93$$

Prądy w obwodzie z rys. 4.16b:

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_3} = \frac{30}{6} = 5$$

$$I_2 = \frac{E}{R_2 + R_4} = \frac{30}{10} = 3$$

Napięcie U_{AB}

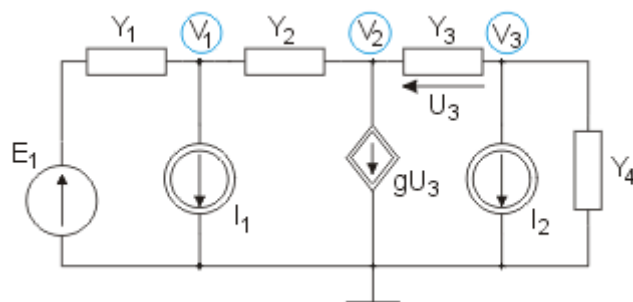
$$U_{AB} = R_2 I_2 - R_1 I_1 = 4$$

Poszukiwany prąd I_x z obvodu zastępczego Thevenina (rys. 4.16c)

$$I_x = \frac{U_{AB}}{Z_{AB}} = 1,36 \text{ A}$$

Zadanie 4.2

Napisać równanie potencjałów węzłowych dla obwodu przedstawionego na rys. 4.17



Rys. 4.17 Schemat obwodu do zadania 4.2

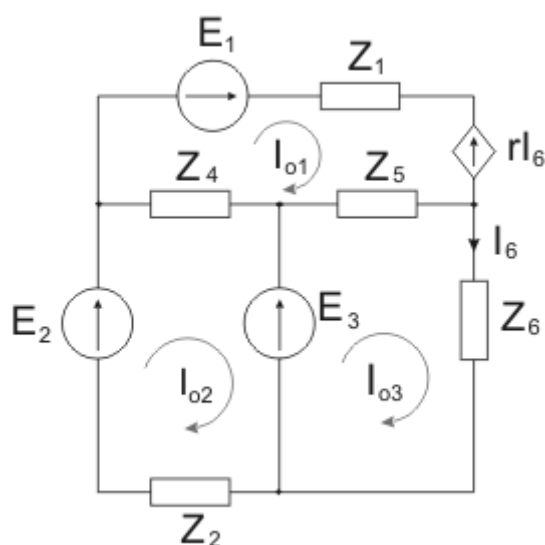
Rozwiązanie

Przy podanych na rysunku oznaczeniach potencjałów węzłów mierzonych względem węzła odniesienia bezpośrednio zastosowanie prawa prądowego Kirchhoffa do wszystkich węzłów obwodu i wyrażenie prądów poprzez potencjały węzłowe pozwala uzyskać równanie węzłowe w postaci

$$\begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 & 0 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 + g & -Y_3 - g \\ 0 & -Y_3 & Y_3 + Y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 E_1 - I_1 \\ 0 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Zadanie 4.3

Napisać macierzowe równanie oczkowe dla obwodu przedstawionego na rys. 4.18



Rys. 4.18 Schemat obwodu do zadania 4.3

Rozwiązanie

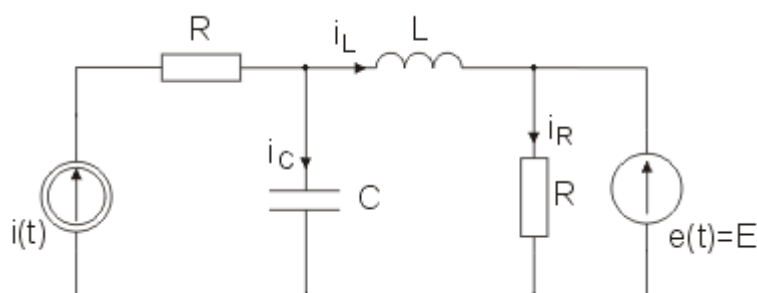
Z prawa napięciowego Kirchhoffa zastosowanego do trzech oczek zaznaczonych na rysunku po wyrażeniu prądów gałęziowych poprzez prądy oczkowe otrzymujemy równanie oczkowe o postaci

$$\begin{bmatrix} Z_1 + Z_4 + Z_5 & -Z_4 & -Z_5 + r \\ -Z_4 & Z_2 + Z_4 & 0 \\ -Z_5 & 0 & Z_5 + Z_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{o1} \\ I_{o2} \\ I_{o3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 - E_3 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

Zadanie 4.4

Wyznaczyć rozwiązanie obwodu z rys. 4.19 stosując zasadę superpozycji. Przyjąć

$$i(t) = 2\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ A}, \quad e(t) = E = 5 \text{ V}, \quad R = 1\Omega, \quad L = 1\text{H}, \quad C = 0,5\text{F}, \quad \omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

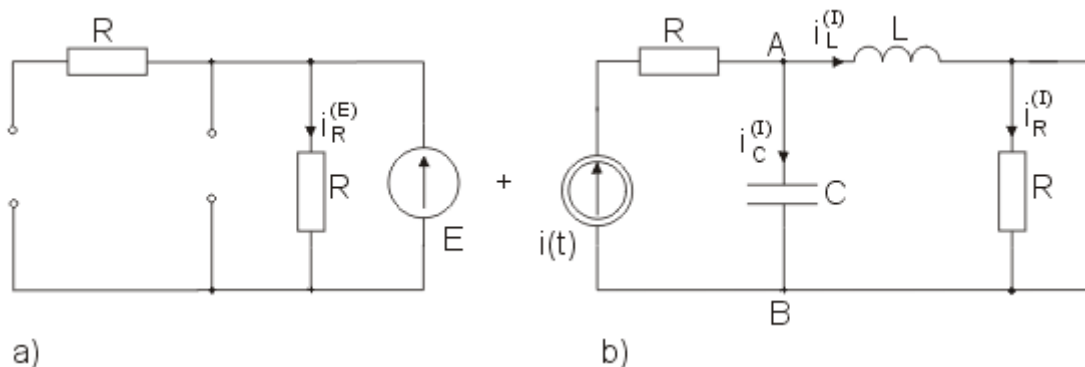


Rys. 4.19 Schemat obwodu do zadania 4.4

Rozwiązanie

A) Rozwiązanie obwodu dla składowej stałej (źródło E)

Obwód dla składowej stałej przedstawiono na rys. 4.20a. Cewka w stanie ustalonym dla składowej stałej jest zwarcie a kondensator przerwą.



Rys. 4.20 Schemat obwodu dla poszczególnych źródeł: a) źródło napięcia stałego, b) źródło prądu sinusoidalnego

Dla prądu stałego tylko jeden prąd, $i_R^{(E)}$, jest różny od zera. Jego wartość jest równa

$$i_R^{(E)} = \frac{E}{R} = 5$$

$$i_L^{(E)} = i_C^{(E)} = 0$$

B) Rozwiązanie obwodu dla składowej zmiennej (źródło $i(t)$)

Obwód dla składowej sinusoidalnej przedstawiono w postaci symbolicznej na rys. 4.20b.

Parametry symboliczne obwodu są następujące: $I = 2e^{j90^\circ}$, $Z_L = j\omega L = j1$, $Z_C = 1/j\omega C = -j2$. Impedancja zastępcza cewki i kondensatora jest równa

$$Z_{LC} = \frac{Z_L Z_C}{Z_L + Z_C} = j2$$

Napięcie i prądy w obwodzie:

$$U_{AB}^{(I)} = Z_{LC} I = -4$$

$$I_C^{(I)} = \frac{U_{AB}^{(I)}}{Z_C} = -j2$$

$$I_L^{(I)} = \frac{U_{AB}^{(I)}}{Z_L} = j4$$

$$I_R^{(I)} = 0$$

Wartości prądów wyrażone w postaci czasowej:

$$i_C^{(I)}(t) = 2\sqrt{2} \sin(t - 90^\circ)$$

$$i_L^{(I)}(t) = 4\sqrt{2} \sin(t + 90^\circ)$$

$$i_R^{(I)}(t) = 0$$

Całkowite rozwiązanie obwodu jest sumą obu składowych:

$$i_C(t) = i_C^{(E)}(t) + i_C^{(I)}(t) = 2\sqrt{2} \sin(t - 90^\circ) \text{ A}$$

$$i_L(t) = i_L^{(E)}(t) + i_L^{(I)}(t) = 4\sqrt{2} \sin(t + 90^\circ) \text{ A}$$

$$i_R(t) = i_R^{(E)}(t) + i_R^{(I)}(t) = 5 \text{ A}$$

Lekcja 5. Analiza obwodów sprzężonych magnetycznie

Wstęp

Interesujące zjawiska powstają w obwodach zawierających cewki położone blisko siebie, w których strumienie magnetyczne obu cewek zachodzą na siebie. Następuje wówczas zjawisko sprzężenia magnetycznego obu obwodów i przenoszenia energii z jednego obwodu do drugiego.

W lekcji piątej dokonamy analizy zjawisk powstających w obwodach sprzężonych magnetycznie. Wprowadzone zostaną metody analizy takich obwodów, wykorzystujące eliminację sprzężeń magnetycznych. Sprzężenia magnetyczne umożliwiają budowę urządzenia zwanego transformatorem, transformującego poziom napięcia wejściowego w wyjściowe o innej wartości. Ostatnia część lekcji poświęcona będzie analizie transformatora powietrznego i transformatora zbudowanego na rdzeniu ferromagnetycznym. W tym ostatnim przypadku mamy do czynienia z obwodem nieliniowym, do którego stosuje się specjalne metody analizy.



5.1. Zjawiska fizyczne przy sprzężeniu magnetycznym cewek

Przyjmijmy, że dwie cewki są położone blisko siebie w taki sposób, że strumień magnetyczny jednej cewki obejmuje również drugą. Całkowity strumień skojarzony z daną cewką (strumień skojarzony jest sumą strumieni ϕ każdego zwoju cewki, co przy z zwojach o identycznym strumieniu daje $\Psi = z\phi$) jest wtedy sumą obu strumieni jeśli ich kierunki są zgodne lub ich różnicą, jeśli kierunki strumieni są przeciwne. Strumienie obu cewek zapiszemy wówczas w postaci.

$$\Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{12} \quad (5.1)$$

$$\Psi_2 = \Psi_{22} \pm \Psi_{21} \quad (5.2)$$

Strumień Ψ_{11} wytworzony jest w cewce pierwszej od prądu tej cewki a strumień Ψ_{12} wytworzony w cewce pierwszej pochodzi od prądu cewki drugiej skojarzonej z pierwszą.

Podobnie strumień Ψ_{22} wytworzony jest w cewce drugiej od prądu tej cewki a strumień Ψ_{21} wytworzony w cewce drugiej pochodzi od prądu cewki pierwszej skojarzonej z drugą. Uwzględniając pojęcie indukcyjności własnej i wzajemnej wprowadzone w rozdziale pierwszym dla cewek liniowych sprzężonych magnetycznie obowiązują następujące relacje:

- Indukcyjności własne

$$L_1 = \frac{\Psi_{11}}{i_1} \quad (5.3)$$

$$L_2 = \frac{\Psi_{22}}{i_2} \quad (5.4)$$

- Indukcyjności wzajemne

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_2} \quad (5.5)$$

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} \quad (5.6)$$

Dla środowisk o tej samej przenikalności magnetycznej obie indukcyjności wzajemne są sobie równe, to znaczy $M_{12} = M_{21} = M$. Dla dwu cewek sprzężonych magnetycznie definiuje się **współczynnik sprzężenia** jako średnią geometryczną współczynników sprzężenia obu cewek, przy czym współczynnik sprzężenia jednej cewki z drugą jest określany jako stosunek strumienia głównego cewki pochodzącego od prądu własnego do strumienia całkowitego cewki. Współczynnik sprzężenia cewek oznaczać będziemy literą k . Spełnia on następującą relację

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \quad (5.7)$$

z której wynika, że współczynnik sprzężenia k jest równy

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (5.8)$$

Przy idealnym (pełnym) sprzężeniu cewek wartość współczynnika sprzężenia jest równa jeden ($k=1$). Indukcyjność wzajemna jest wówczas średnią geometryczną indukcyjności własnych obu cewek. Przy braku sprzężenia magnetycznego między cewkami wartość $k=0$.

Sprzężenie magnetyczne powoduje indukowanie się napięcia w cewce od zmian prądu własnego cewki i od zmian prądu cewki z nią sprzężonej. Wzory określające odpowiednie napięcia na cewkach sprzężonych magnetycznie dane są wówczas w postaci

$$u_1 = \frac{d\Psi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \quad (5.9)$$

$$u_2 = \frac{d\Psi_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} \quad (5.10)$$

Znak plus lub minus występujący we wzorze odpowiada sprzężeniu bądź dodatniemu (znak plus) bądź ujemnemu (znak minus). Rodzaj sprzężenia zależy od kierunku prądu cewki względem początku uzwojenia. Rys. 5.1 przedstawia sytuacje odpowiadające sprzężeniu dodatniemu a rys. 5.2 ujemnemu.



Rys. 5.1. Ilustracja sprzężenia dodatniego dwu cewek



Rys. 5.2. Ilustracja sprzężenia ujemnego dwu cewek

Zauważmy, że przy istnieniu sprzężenia magnetycznego w cewce generowane jest napięcie na cewce nawet przy prądzie własnym cewki równym zero. Oznacza to przenoszenie się energii z jednego obwodu do drugiego drogą magnetyczną.

5.2. Analiza obwodów magnetycznie sprzężonych przy wymuszeniu sinusoidalnym

5.2.1. Równania symboliczne elementów sprzężonych magnetycznie

Analiza obwodów ze sprzężeniami magnetycznymi w stanie ustalonym przy wymuszeniu sinusoidalnym może być przeprowadzona przy zastosowaniu metody symbolicznej, w której w miejsce różniczkowania wprowadza się działania na liczbach zespolonych. Dla wymuszenia sinusoidalnego wzory różniczkowe upraszczają się do zależności algebraicznych typu zespolonego, które podobnie jak dla indukcyjności własnych wyprowadzonych w rozdziale drugim można zapisać w postaci

$$U_1 = j\omega L_1 I_1 \pm j\omega M I_2 \quad (5.11)$$

$$U_2 = j\omega L_2 I_2 \pm j\omega M I_1 \quad (5.12)$$

Znak plus obowiązuje dla **sprzężenia dodatniego** (strumienie magnetyczne obu cewek sumują się) a znak minus dla **sprzężenia ujemnego** (strumienie magnetyczne obu cewek odejmują się). Jak widać z powyższych wzorów cewki sprzężone magnetycznie reprezentują sobą reaktancje, przy czym można tu wyróżnić dwa rodzaje reaktancji: **reaktancję indukcyjną własną** (zwaną dotąd reaktancją indukcyjną) i **reaktancję indukcyjną wzajemną**. Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$X_M = \omega M \quad - \text{reaktancja indukcyjna wzajemna}$$

$$Z_M = j\omega M \quad - \text{impedancja indukcyjna wzajemna.}$$

Napięcie skuteczne zespolone na cewkach sprzężonych można wówczas opisać następującymi wzorami

$$U_1 = Z_{L1} I_1 \pm Z_M I_2 = j\omega L_1 I_1 \pm j\omega M I_2 \quad (5.13)$$

$$U_2 = Z_{L2} I_2 \pm Z_M I_1 = j\omega L_2 I_2 \pm j\omega M I_1 \quad (5.14)$$

w których Z_{L1} oraz Z_{L2} oznaczają impedancje indukcyjności własnych cewki pierwszej i drugiej, $Z_{L1} = j\omega L_1$, $Z_{L2} = j\omega L_2$. Dla wyznaczenia wartości skutecznej napięcia na cewce sprzężonej muszą być znane zarówno wartość skuteczna prądu jednej cewki jak i drugiej,

sprężonej z nią. Znak sprężenia (plus lub minus) powoduje zmniejszanie (sprężenie ujemne) lub zwiększanie (sprężenie dodatnie) napięcia danej cewki.

Najważniejszym elementem analizy obwodów ze sprężeniami magnetycznymi jest wyznaczenie prądów poszczególnych gałęzi w obwodzie. Bezpośrednie zastosowanie poznanych dotąd metod analizy obwodów (metoda węzłowa, oczkowa, Thevenina czy Nortona) wymaga w pierwszej kolejności wyeliminowania sprężenia magnetycznego cewek, a więc pozbycia się wpływu prądu jednej cewki na napięcie cewki drugiej.

5.2.2. Eliminacja sprężeń magnetycznych

Eliminacja sprężeń magnetycznych jest możliwa bezpośrednio na podstawie analizy struktury obwodu i uwzględnienia położenia początków uzwojeń cewek względem węzłów wspólnych (lub uznanych za wspólne przy braku ich bezpośredniego połączenia). W tym przypadku można wyróżnić dwa rodzaje połączeń:

- dwie cewki sprężone magnetycznie mają jednakowo usytuowane początki uzwojeń względem węzła - takie cewki uważać będziemy za **jednoimienne** (rys. 5.3)



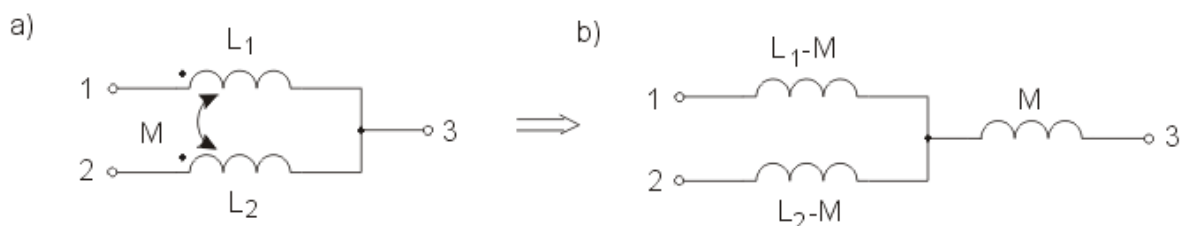
Rys. 5.3. Cewki jednoimienne

- dwie cewki sprężone magnetycznie mają przeciwnie usytuowane początki uzwojeń względem węzła - takie cewki uważać będziemy za **różnoimienne** (rys. 5.4).



Rys. 5.4. Cewki różnoimienne

W przypadku cewek jednoimiennych eliminacja sprężenia magnetycznego prowadzi do obwodu zastępczego przedstawionego na rys. 5.5..

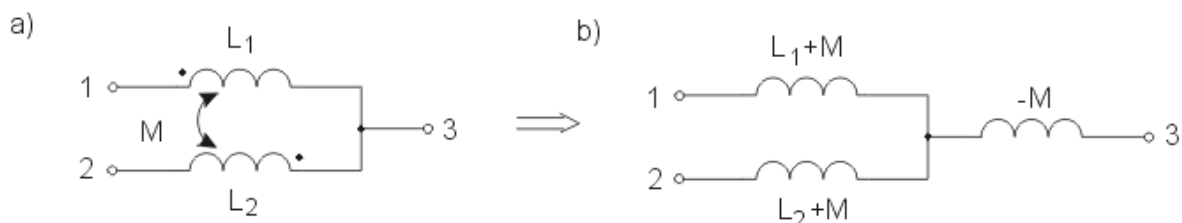


Rys. 5.5. Eliminacja sprzężenia magnetycznego cewek jednoimiennych



W gałęziach zawierających cewki pojawiła się impedancja wzajemna ze znakiem minus a w gałęzi wspólnej impedancja wzajemna ze znakiem plus. Łatwo można pokazać, że przy takim sposobie eliminacji sprzężeń magnetycznych napięcia na zaciskach zewnętrznych 1, 2 i 3 przy niezmiennych prądach zewnętrznych w obu obwodach równają się sobie (co jest warunkiem równoważności).

Schemat z rys. 5.6 odpowiada eliminacji sprzężenia w przypadku dwu cewek różnoimiennych.



Rys. 5.6. Eliminacja sprzężenia magnetycznego cewek różnoimiennych



W gałęziach zawierających cewki pojawiła się impedancja wzajemna ze znakiem plus a w gałęzi wspólnej impedancja wzajemna ze znakiem minus. Łatwo udowodnić, że przy takim sposobie eliminacji sprzężeń napięcia na zaciskach zewnętrznych 1, 2 i 3 w obu obwodach (oryginalnym i po eliminacji sprzężenia) przy tych samych prądach zewnętrznych równają się sobie (co jest warunkiem równoważności).

Przy eliminacji sprzężeń magnetycznych przyjęty zwrot prądów nie ma żadnego wpływu na końcową postać obwodu bez sprzężeń. Ma na nią wpływ jedynie usytuowanie

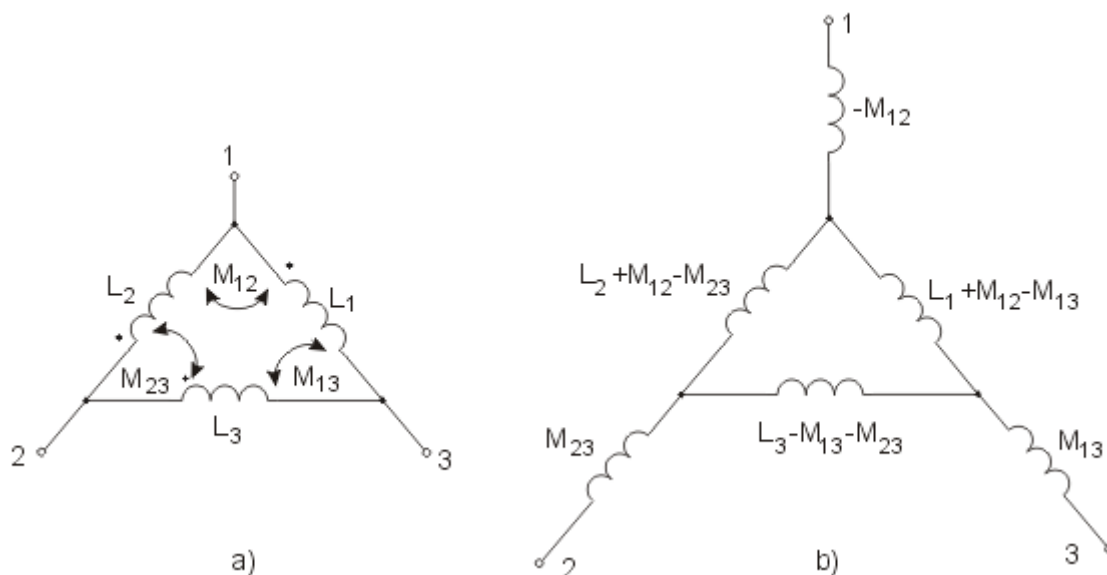
początków uzwojeń cewek względem wspólnego węzła, czyli jednoimiennosc lub różnoimiennosc cewek sprzężonych magnetycznie.

W obu przypadkach otrzymuje się obwody bez sprzężeń, równoważne oryginalnym jedynie pod względem prądowym. Napięcia w obu obwodach w części podlegającej przekształceniu są całkowicie różne. Rzeczywiste napięcia panujące na elementach podlegających transformacji powinny być określone bezpośrednio na podstawie obwodu oryginalnego i powinny uwzględniać sprzężenie magnetyczne (wzory 5.13 i 5.14).

Należy podkreślić, że przy wielu cewkach sprzężonych ze sobą, eliminacja każdego sprzężenia między dwoma wybranymi cewkami może zachodzić niezależnie od pozostałych sprzężeń, co znakomicie ułatwia przeprowadzenie procesu eliminacji sprzężeń.

Przykład 5.1

Na rys. 5.7a przedstawiony jest obwód zawierający trzy cewki sprzężone magnetycznie ze sobą. Stosując metodę eliminacji sprzężeń do każdej pary cewek sprzężonych ze sobą otrzymuje się schemat obwodu bez sprzężeń, równoważny pod względem prądowym obwodowi ze sprzężeniami (rys. 5.7b).



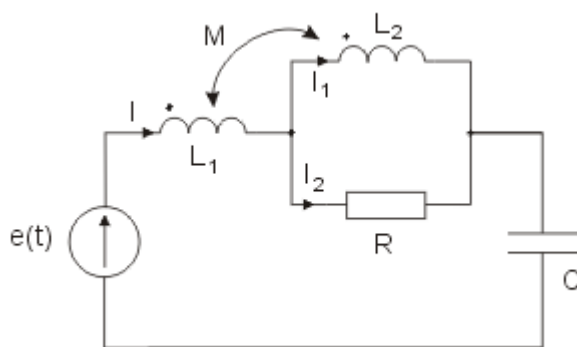
Rys. 5.7. Przykład eliminacji sprzężeń magnetycznych wielu cewek: a) obwód oryginalny, b) obwód po eliminacji sprzężeń

Przy analizie obwodów elektrycznych zawierających sprzężenia magnetyczne pierwszym krokiem jest eliminacja sprzężeń magnetycznych zgodnie z zasadami podanymi

wyżej. Dzięki temu każdy element obwodu staje się uzależniony jedynie od swojego prądu. *Schemat obwodu po eliminacji sprzężeń jest równoważny obwodowi oryginalnemu jedynie pod względem prądowym.* Stąd obwód taki może służyć wyłącznie obliczeniu prądów. Dla wyznaczenia napięć gałęziowych należy wrócić do obwodu pierwotnego ze sprzężeniami magnetycznymi. Napięcia na elementach sprzężonych obliczać należy uwzględniając sprzężenia między cewkami przy wykorzystaniu wzorów (5.13) i (5.14).

Przykład 5.2

Obliczyć rozptyw prądów i rozkład napięć na poszczególnych elementach obwodu elektrycznego ze sprzężeniami magnetycznymi, przedstawionego na rys. 5.8. Należy przyjąć następujące wartości elementów: $R_1 = 10\Omega$, $L_1 = 2H$, $L_2 = 2H$, $M = 1H$, $C = 0,02F$ oraz wymuszenie napięciowe sinusoidalne $e(t) = 100\sqrt{2} \sin(10t + 45^\circ)$ V.



Rys. 5.8. Schemat obwodu elektrycznego do przykładu 5.2

Rozwiązanie

Dla podanych wyżej wartości parametrów obwodu impedancje zespolone odpowiadające poszczególnym elementom są równe:

$$\omega = 10$$

$$Z_1 = j\omega L_1 = j20$$

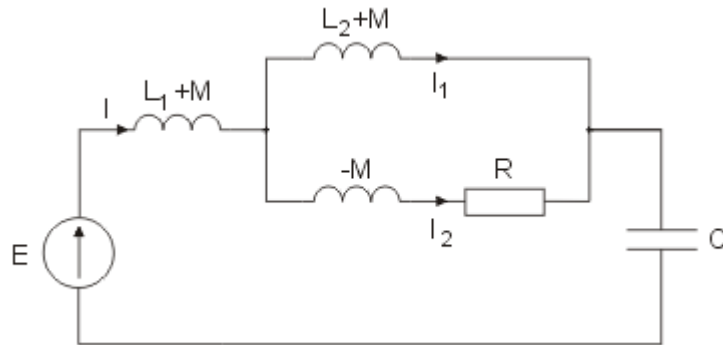
$$Z_2 = j\omega L_2 = j20$$

$$Z_M = j\omega M = j10$$

$$Z_C = -j1 / \omega C = -j5$$

$$E = 100e^{j45^\circ}$$

Pierwszym etapem analizy jest eliminacja sprzężenia magnetycznego między cewkami. Schemat obwodu po eliminacji przedstawiony jest na rys. 5.9.



Rys. 5.9. Schemat obwodu po eliminacji sprzężeń magnetycznych

Rozwiązanie tego obwodu względem prądów gałęziowych uzyskamy redukując obciążenie źródła do jednej impedancji zastępczej. Stanowi ją połączenie szeregowe impedancji indukcyjnej i pojemnościowej

$$Z_{LC} = j30 - j5 = j25$$

oraz układu równoległego rezystora i cewek

$$Z_{RL} = \frac{j30 \cdot (10 - j10)}{10 + j20} = 18 - j6$$

Impedancja zastępcza jest więc równa

$$Z = Z_{RL} + Z_{LC} = 18 + j19$$

Prąd I w obwodzie określony jest wzorem

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{100e^{j45^\circ}}{18 + j19} = 3,82 - j0,10$$

Spadek napięcia na połączeniu równoległym elementów jest równy

$$U_{12} = Z_{RL} \cdot I = 68,13 - j24,77$$

Prądy w gałęziach równoległych są równe

$$I_1 = \frac{U_{12}}{j30} = -0,83 - j2,27$$

$$I_2 = \frac{U_{12}}{10 - j10} = 4,64 + j2,17$$

W następnym etapie po obliczeniu prądów można przejść do obliczenia napięć posługując się schematem oryginalnym obwodu (ze sprzężeniami magnetycznymi). Korzystając z prawa Ohma i zależności definicyjnych sprzężenia magnetycznego otrzymuje się

$$U_R = 10I_2 = 46,45 + j21,68$$

$$U_{L1} = Z_1 I + Z_M I_1 = 24,77 + j68,13$$

$$U_{L2} = Z_2 I_1 + Z_M I = 46,45 + j21,68$$

$$U_C = Z_C I = -0,52 - j19,10$$

5.3 Transformator

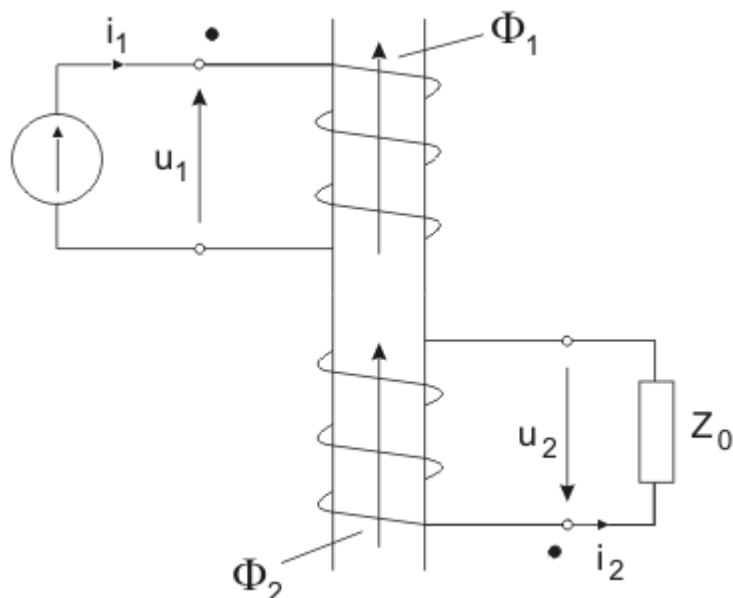
5.3.1 Podstawy fizyczne działania transformatora

Transformator jest układem przetwarzającym napięcie wejściowe w napięcie wyjściowe za pośrednictwem strumienia magnetycznego przy braku bezpośredniego połączenia galwanicznego między obu zaciskami (wejściowymi i wyjściowymi). Transformatory mogą być stosowane do różnych celów, ale podstawowym ich zadaniem jest zmiana wartości napięcia wejściowego na inną wartość napięcia wyjściowego. Może to być zarówno podwyższenie jak i obniżenie wartości. Przy zmianie napięcia ulegają odpowiedniej zmianie również prądy w uzwojeniach transformatora.

W analizie teoretycznej przyjmować będziemy transformator idealizowany, czyli taki w którym nie ma strat energii, nie istnieje zjawisko rozpraszania strumienia magnetycznego (współczynnik sprzężenia magnetycznego $k=1$), nie występują efekty pasytywne (np.

pojemności międzyzwojowe), nie uwzględniona jest rezystancja uzwojeń, zjawiska prądów wirowych itp..

Przekazywanie energii elektrycznej z jednego obwodu do drugiego następuje za pośrednictwem pola elektromagnetycznego (strumienia magnetycznego). Na rys. 5.10 przedstawiono poglądowy schemat transformatora zasilanego napięciem U_1 i obciążonego po stronie wtórnej impedancją Z_0 .



Rys. 5.10. Poglądowy schemat transformatora

Uzwojenie, do którego jest zazwyczaj doprowadzone źródło energii elektrycznej, nazywamy **uzwojeniem pierwotnym**, natomiast uzwojenie, do którego jest dołączony odbiornik, nazywamy **uzwojeniem wtórnym**. Zaciski uzwojenia pierwotnego stanowią wejście układu, a zaciski uzwojenia wtórnego - wyjście. Odpowiednie napięcia i prądy w transformatorze nazywamy pierwotnymi lub wtórnymi. Wszystkie wielkości i parametry związane z uzwojeniem pierwotnym opatrzymy wskaźnikiem 1, a wielkości i parametry związane z uzwojeniem wtórnym – wskaźnikiem 2.

Do uzwojenia pierwotnego przyłożone jest napięcie sinusoidalnie zmienne o wartości chwilowej $u_1(t)$. Wartość chwilową prądu w uzwojeniu pierwotnym oznaczmy przez $i_1(t)$. Pod wpływem zmiennego w czasie prądu $i_1(t)$ w przestrzeni otaczającej uzwojenie powstaje zmienny strumień magnetyczny ϕ , będący superpozycją strumieni ϕ_1 i ϕ_2 . Przy założeniu jego równomiernego rozkładu na przekroju S , strumień jest iloczynem indukcji magnetycznej

B i przekroju S , $\phi = BS$. Strumień ten kojarzy się zarówno z uzwojeniem pierwotnym wytwarzając strumień skojarzony $\Psi_1 = z_1\phi$, jak i uzwojeniem wtórnym wytwarzając w nim strumień skojarzony $\Psi_2 = z_2\phi$. Zgodne z prawem indukcji elektromagnetycznej pod wpływem zmiennego w czasie strumienia magnetycznego indukuje się napięcie $u(t)$

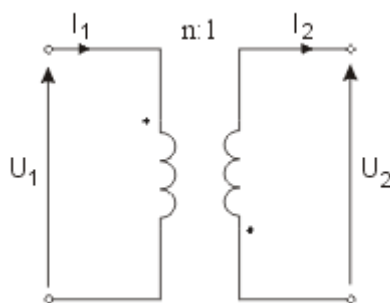
$$u(t) = \frac{d\Psi}{dt} \quad (5.15)$$

Jeśli do uzwojenia wtórnego dołączymy odbiornik, to pod wpływem napięcia zaindukowanego w tym uzwojeniu popłynie prąd $i_2(t)$.

W zależności od środowiska w jakim zamyka się wytworzony wokół uzwojeń strumień magnetyczny rozróżniamy transformatory powietrzne (korpus transformatora wykonany z dielektryka o przenikalności magnetycznej względnej bliskiej jedności) i transformatory z rdzeniem ferromagnetycznym (korpus wykonany z rdzenia ferromagnetycznego). Zanim przejdziemy do omówienia obu rodzajów transformatorów, przedstawimy zależności obowiązujące dla transformatora idealnego.

5.3.2 Transformator idealny

Wyidealizowanym typem transformatora jest tak zwany transformator idealny, w którym zakłada się pełne sprzężenie magnetyczne, brak strat (wszystkie rezystancje równe zero) i pominięcie zjawisk pasożytniczych. Symbol graficzny transformatora idealnego przedstawiono na rys. 5.11.



Rys. 5.11. Symbol graficzny transformatora idealnego

W schemacie tym pomija się zwykle symbol sprzężenia magnetycznego pozostawiając jedynie oznaczenie początków uzwojeń transformatora. Transformator idealny jest w pełni opisany poprzez tak zwaną **przekładnię zwojową**, określającą stosunek napięcia pierwotnego

do wtórnego (**przekładnię napięciową**) na podstawie liczby zwojów pierwotnych i wtórnych. Przekładnia napięciowa transformatora idealnego niezależnie od sposobu wykonania i od obciążenia, powinna być równa przekładni zwojowej określonej wzorem

$$n = \frac{z_1}{z_2} \quad (5.16)$$

Oznacza to, że relacja między napięciem pierwotnym i wtórnym jest następująca

$$\frac{U_1}{U_2} = n \rightarrow U_1 = \frac{z_1}{z_2} U_2 \quad (5.17)$$

Wobec założenia o braku strat w samym transformatorze idealnym moc dostarczona na zaciski pierwotne równa się mocy na zaciskach wtórnych, to jest $S_1 = S_2$ (podobnie jest z mocą czynną i bierną). Przy oznaczeniu przekładni transformatora idealnego przez n , z warunku równości mocy wejściowej i wyjściowej

$$U_1 I_1^* = U_2 I_2^*$$

wynika relacja między prądem pierwotnym i wtórnym transformatora. Mianowicie

$$I_1 = \frac{1}{n} I_2 \quad (5.18)$$

Obie zależności (5.17) i (5.18) można zapisać w następującej postaci macierzowej

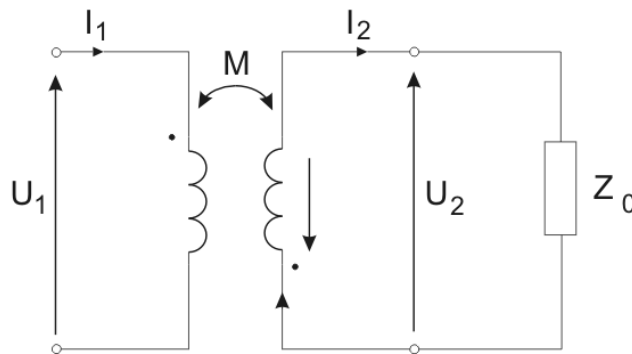
$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Powyższe równanie macierzowe nazywane jest równaniem łańcuchowym transformatora idealnego. Wykonanie transformatora idealnego w praktyce nie jest możliwe, jednak współczesne realizacje techniczne transformatorów zwłaszcza transformatory z rdzeniem ferromagnetycznym są bliskie ideału.

5.4 Transformator powietrzny

Działanie transformatora zasadniczo nie zależy od tego w jakim środowisku zamyka się strumień skojarzony z uzwojeniem transformatora. Sposób analizowania transformatora powietrznego i transformatora z rdzeniem ferromagnetycznym jest jednak nieco inny. W tym punkcie ograniczymy się do transformatora powietrznego. Przyjmiemy, że korpus transformatora wykonany jest z materiału nieferromagnetycznego.

Transformator powietrzny jest układem dwu cewek magnetycznie sprzężonych, nawiniętych na korpusie wykonanym z dielektryka o względnej przenikalności magnetycznej bliskiej jedności. Model idealnego transformatora powietrznego (bez uwzględnienia rezystancji uzwojeń) obciążonego impedancją Z_0 jest przedstawiony na rys. 5.12.



Rys. 5.12. Model idealnego transformatora powietrznego

Indukcyjności własne uzwojeń oznaczone są przez L_1 i L_2 a indukcyjność wzajemna przez M , przy czym $M = k\sqrt{L_1 L_2}$. Sprężenie magnetyczne tego typu transformatora nie jest zbyt dobre i charakteryzuje się stosunkowo dużym współczynnikiem rozproszenia, a zatem małym współczynnikiem sprzężenia k ($k \ll 1$).

Napięcie zasilające wywołuje w obwodzie pierwotnym prąd I_1 , wytwarzający strumień magnetyczny. Energia obwodu pierwotnego przenosi się do obwodu wtórnego poprzez sprzężenie magnetyczne, zaznaczone symbolicznie jako indukcyjność wzajemna M . Pod wpływem zaindukowanego napięcia przy zamkniętym obwodzie wtórnym płynie prąd I_2 , odkładając na impedancji odbiornika napięcie U_2 .

Rozróżniamy trzy zasadnicze stany pracy transformatora: stan jałowy - gdy zaciski wtórne są rozwarte, stan zwarcia - gdy zaciski wtórne są połączone bezimpedancyjnie oraz stan obciążenia - gdy do zacisków wtórnych jest dołączony odbiornik o skończonej impedancji.

Analizując transformator w stanie ustalonym przy wymuszeniu sinusoidalnym zastosujemy metodę symboliczną. Z definicji sprzężenia magnetycznego obu cewek przy założonym zwrocie prądów i przyjęciu początków uzwojeń jak na rys. 5.12 wynikają następujące równania opisujące obwód

$$U_1 = jX_{L1}I_1 + jX_M I_2 \quad (5.20)$$

$$U_2 = -[jX_{L2}I_2 + jX_M I_1] \quad (5.21)$$

Znak minus występujący we wzorze na U_2 wynika z kierunku U_2 zaznaczonego na rysunku 5.12. Z równania (5.20) i (5.21) wynika następujący wzór określający prąd wejściowy układu

$$I_1 = \frac{U_1 - jX_M I_2}{jX_{L1}} \quad (5.22)$$

Podstawiając wyrażenie na prąd do równania drugiej cewki otrzymuje się

$$U_2 = -\left[jX_{L2}I_2 + \frac{jX_M}{jX_{L1}}(U_1 - jX_M I_2) \right] \quad (5.23)$$

Po przekształceniu tego równania otrzymać można zależność napięcia wyjściowego transformatora przy obciążeniu Z_o od napięcia zasilającego obwód oraz od prądu obciążenia

$$U_2 = -\left[\frac{X_M}{X_{L1}}U_1 + I_2 \left(jX_{L2} - j\frac{X_M^2}{X_{L1}} \right) \right] \quad (5.24)$$

Zauważmy, że nawet dla wyidealizowanego transformatora powietrznego współczynnik sprzężenia $k \ll 1$, stąd $X_M^2 = kX_{L1}X_{L2} \ll X_{L1}X_{L2}$. Oznacza to, że napięcie wyjściowe transformatora zależy bardzo silnie od prądu obciążenia, co jest cechą niepożądaną, gdyż oznacza duże wahania napięcia wyjściowego przy zmianie obciążenia.

Jedynie w przypadku stanu jałowego transformatora, dla którego $I_2 = 0$, przekładnia transformatora nie zależy od obciążenia. W takim przypadku

$$U_2 = -\frac{X_M}{X_{L1}} U_1 \quad (5.25)$$

Jeśli uwzględnimy, że reaktancje cewek są proporcjonalne do liczby zwojów według relacji $X_{L1} = Kz_1^2$, $X_{L2} = Kz_2^2$, $X_M = Kz_1 z_2$ gdzie K oznacza pewną stałą konstrukcyjną, to z zależności (5.24) wynika

$$U_2 = -\frac{z_2}{z_1} U_1 = -\frac{1}{n} U_1 \quad (5.26)$$

Z powyższej zależności widać, że jedynie w stanie jałowym transformatora powietrznego stosunek napięcia pierwotnego transformatora do napięcia wtórnego jest równy stosunkowi liczby zwojów pierwotnych do wtórnych (z dokładnością do znaku), a więc przekładni zwojowej (transformator idealny)

$$\frac{U_1}{U_2} = -\frac{z_1}{z_2} = -n \quad (5.27)$$

Jest to cecha bardzo pożądana z punktu widzenia praktycznego, gdyż pozwala w bardzo prosty sposób zmieniać poziomy napięć zarówno w górę (liczba zwojów wtórnych większa od liczby zwojów pierwotnych) jak i w dół (liczba zwojów wtórnych mniejsza niż liczba zwojów pierwotnych).

Zauważmy, że pożądana relacja napięciowa między napięciami pierwotnym i wtórnym transformatora idealnego jest dokładnie realizowana przez transformator powietrzny jedynie w stanie jałowym. Niestety obciążenie transformatora powietrznego powoduje zniekształcenie tej relacji przez prąd obciążenia. W związku z powyższym transformator powietrzny w stanie obciążenia nie może być uważany za transformator idealny.

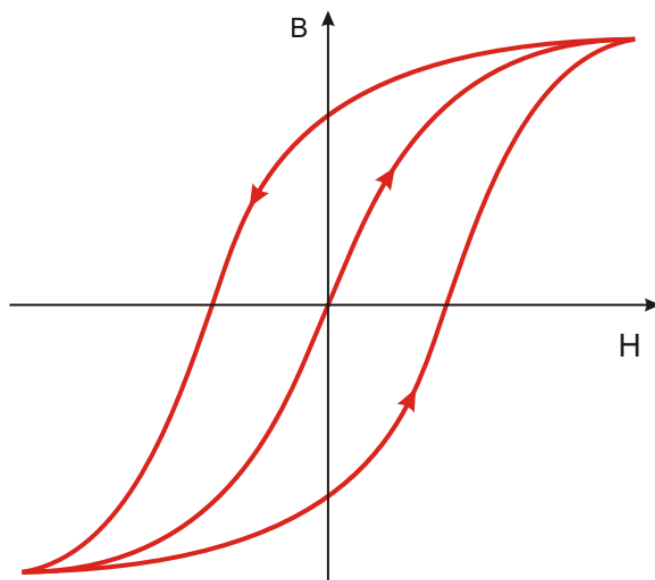
5.5 Transformator z rdzeniem ferromagnetycznym

5.5.1 Podstawowe prawa obwodów magnetycznych

Ogromną poprawę własności transformatora uzyskuje się przy zastosowaniu zamiast cewek powietrznych cewek z rdzeniem ferromagnetycznym (żelazem). Rdzeń ferromagnetyczny tworzy zamknięty obwód magnetyczny, stanowiący drogę o małej oporności dla strumienia

magnetycznego ϕ , powstałego w wyniku działania źródła pola magnetycznego. Źródłem pola magnetycznego może być albo uzwojenie, przez które przepływa prąd elektryczny albo magnes trwały, będący ciałem ferromagnetycznym, w którym pole powstało i trwa nadal, mimo że w obszarze na zewnątrz ciała prąd nie płynie.

W wyniku przepływu prądu przez cewkę transformatora powstaje pole magnetyczne o indukcji $\mathbf{B}$ i natężeniu $\mathbf{H}$ ($\mathbf{B}$ i $\mathbf{H}$ są wielkościami wektorowymi). Jednostką indukcji magnetycznej jest **tesla** ($1T = 1 \frac{Vs}{m^2}$) a natężenia magnetycznego **amper na metr** ($\frac{A}{m}$). W materiale ferromagnetycznym kierunki wektorów $\mathbf{B}$ i $\mathbf{H}$ są zgodne. Zależność między indukcją $\mathbf{B}$ i natężeniem pola $\mathbf{H}$ określona jest w ogólności w postaci pętli histerezy (rys. 15.3).



Rys. 5.13 Pierwotna krzywa magnesowania żelaza

W przypadku transformatorów ograniczamy się zwykle do **pierwotnej krzywej magnesowania** (krzywa przechodząca przez początek układu współrzędnych), nie uwzględniając niejednoznaczności procesu magnesowania (pętli histerezy). Wektory indukcji i natężenia pola magnetycznego w żelazie można wówczas powiązać jednoznacznym równaniem nieliniowym opisującym krzywą magnesowania pierwotnego

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (5.28)$$

gdzie μ jest **przenikalnością magnetyczną** bezwzględną środowiska, będącą funkcją natężenia pola $\mathbf{H}$ wyrażoną w $\frac{H}{m}$, μ_0 - stałą magnetyczną próżni (**przenikalność magnetyczna próżni**) równą $4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$ a μ_r - **przenikalnością magnetyczną względną**, wskazującą ile razy przenikalność danego środowiska jest większa od przenikalności próżni. Dla materiałów ferromagnetycznych przenikalność magnetyczna w zakresie liniowym krzywej magnesowania osiąga bardzo duże wartości rzędu tysięcy a nawet setek tysięcy w przypadku specjalnych materiałów ferromagnetycznych. Niestety przy dużych wartościach natężenia pola magnetycznego następuje nasycenie wartości indukcji (patrz krzywa magnesowania na rys. 5.13) i w efekcie znaczne zmniejszenie wartości przenikalności względnej. W zastosowaniach praktycznych punkt pracy transformatora położony jest zwykle w części liniowej i dlatego można z dużym prawdopodobieństwem założyć bardzo dużą wartość współczynnika przenikalności względnej.

W rozpatrywanym rdzeniu ferromagnetycznym o polu przekroju poprzecznego S zamyka się strumień magnetyczny ϕ , powiązany z indukcją magnetyczną $\mathbf{B}$ zależnością

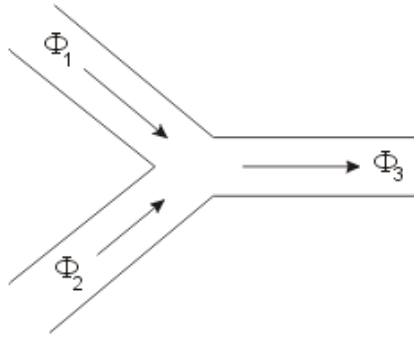
$$\phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} \quad (5.29)$$

Przy założeniu równomiernego rozkładu strumienia ϕ w polu przekroju poprzecznego ($\mathbf{B} = B = \text{const}$) powyższe wyrażenie upraszcza się do postaci $\phi = BS$. Jednostką strumienia magnetycznego w układzie SI jest **weber** ($1\text{Wb}=1\text{Vs}$).

W przypadku obwodów magnetycznych rozgałęzionych strumień ϕ spełnia tzw. **prawo Kirchhoffa dla strumieni** w węźle, zgodnie z którym suma algebraiczna strumieni magnetycznych (z uwzględnieniem ich zwrotu), w każdym węźle obwodu magnetycznego jest równa zeru, czyli

$$\sum_k \phi_k = 0 \quad (5.30)$$

Przykład interpretacji tego prawa dla jednego węzła obwodu magnetycznego przedstawiony jest na rys. 5.14



Rys. 5.14. Schemat węzła obwodu magnetycznego

Równanie Kirchhoffa dotyczące strumieni w tym węźle przyjmuje postać

$$\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 = 0$$

Strumień magnetyczny ϕ w transformatorze jest skojarzony z każdym zwojem cewki. Całkowity strumień skojarzony ze wszystkimi zwojami cewki określony jest więc wzorem

$$\Psi = z\phi \quad (5.31)$$

Drugim podstawowym prawem obwodów magnetycznych jest prawo przepływu Ampera, zgodnie z którym całka liniowa wektora natężenia pola magnetycznego $\mathbf{H}$ po krzywej zamkniętej l w polu magnetycznym równa się prądowi przenikającemu przez powierzchnię ograniczoną tą krzywą, czyli

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum_k z_k I_k \quad (5.32)$$

W ogólnym wzorze Ampera uwzględniono wiele uzwojeń wzbudzających o liczbie zwojów z_k i prądach I_k . Przy jednym uzwojeniu cewki zawierającym z zwojów, przez które przepływa prąd I i założeniu, że natężenie pola na całej drodze l jest jednakowe i równe H , prawo Ampera upraszcza się do postaci skalarnej

$$Hl = zI \quad (5.33)$$

Iloczyn natężenia pola magnetycznego H na odcinku pola o długości l przez długość tego odcinka nazywany jest **napięciem magnetycznym**, a iloczyn prądu I przez liczbę z zwojów cewki – **siłą magnetomotoryczną**, oznaczaną zwykle w postaci $\Theta = zI$.

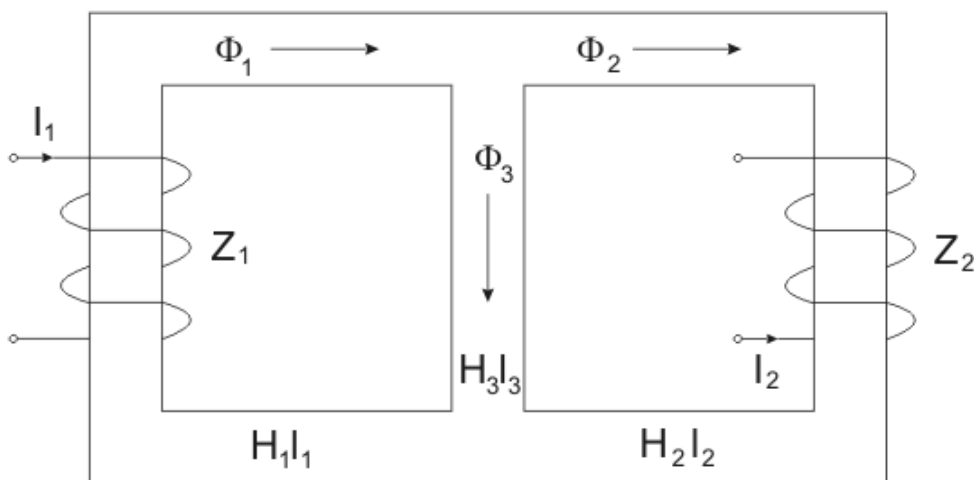
Zależność (5.33) wiąże bezpośrednio wektor natężenia pola magnetycznego z prądem elektrycznym obwodu wzbudzającym to pole. Przy znanym wymuszeniu prądowym i wymiarach cewki pozwala ona określić wartość natężenia pola magnetycznego

$$H = \frac{zI}{l} \quad (5.34)$$

Prawo przepływu Ampera wyrażone zależnością (5.32) może być napisane dla dowolnego oczka obwodu magnetycznego, przyjmując postać tzw. **drugiego prawa Kirchhoffa dla obwodu magnetycznego**. Zgodnie z tym prawem dla każdego oczka obwodu magnetycznego suma algebraiczna napięć magnetycznych wszystkich elementów oczka jest równa sumie algebraicznej sił magnetomotorycznych zawartych w tym oczku. Zapiszemy to w postaci

$$\sum_k H_k l_k = \sum_k z_k I_k \quad (5.35)$$

We wzorze tym zostało założone, że obwód magnetyczny tworzy wiele gałęzi o długości l_k każda, przy czym w każdej gałęzi natężenie magnetyczne przyjmuje wartość H_k . Przykładowo równania Kirchhoffa dla obwodu magnetycznego przedstawionego na rys. 5.15 zawierającego



Rys. 5.15. Przykład obwodu magnetycznego o dwu oczkach



dwa niezależne oczka, przy założonych oznaczeniach jak pokazano na rysunku można zapisać w postaci:

- równania napięć magnetycznych

$$H_1 l_1 + H_3 l_3 = z_1 I_1$$

$$H_3 l_3 - H_2 l_2 = z_2 I_2$$

- równanie strumieni

$$\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 = 0$$

Strumienie i natężenia pola magnetycznego powiązane są za pośrednictwem krzywej magnesowania żelaza $\phi_k = S_k B_k = S_k f(H_k)$ dla $k=1, 2, 3$. Ze względu na nieliniowy charakter krzywej magnesowania równania powyższe tworzą więc układ równań nieliniowych.

Istotnym pojęciem w teorii obwodów magnetycznych jest pojęcie reluktancji, czyli oporu jaki jest stawiany strumieniowi magnetycznemu na drodze przepływu. Jeśli weźmiemy pod uwagę fragment obwodu magnetycznego o przekroju S i długości l którym przepływa stały strumień ϕ , to z definicji napięcia magnetycznego U_μ wynika

$$U_\mu = Hl = \frac{\phi}{\mu S} l = \frac{l}{\mu S} \phi \quad (5.36)$$

Wielkość

$$R_\mu = \frac{l}{\mu S} \quad (5.37)$$

nazywana jest reluktancją (oporem magnetycznym). W przypadku rdzenia ferromagnetycznego wartość przenikalności magnetycznej μ jest bardzo duża, co oznacza, że opór magnetyczny na tej drodze jest mały. Z kolei w przypadku powietrza $\mu = \mu_0$ przyjmuje wartość bardzo małą, co powoduje, że opór magnetyczny na takiej drodze jest bardzo duży.

Oznacza to, że dla cewki zbudowanej na rdzeniu ferromagnetycznym strumień rozproszenia (część strumienia zamykająca się przez powietrze) jest pomijalnie mały, a prawie cały strumień zamyka się przez żelazo. Przy dwu cewkach umieszczonych na takim rdzeniu strumień jednej cewki przenika więc prawie całkowicie drugą cewkę co powoduje, że sprzężenie magnetyczne jest idealne, a współczynnik sprzężenia magnetycznego k bliski jedności.

5.5.2 Analiza transformatora z rdzeniem ferromagnetycznym

Rdzeń ferromagnetyczny ma zdolność skupiania pola magnetycznego i zmniejszania w ten sposób strumienia rozproszenia zamykającego się przez powietrze otaczające cewkę. Wynika stąd, że współczynnik sprzężenia magnetycznego k dla dwu cewek umieszczonych na wspólnym rdzeniu jest bliski maksymalnej wartości równej jeden ($k \approx 1$). Oznacza to, że dla cewek z rdzeniem ferromagnetycznym indukcyjność wzajemna jest w przybliżeniu średnią geometryczną indukcyjności własnych obu cewek ($M \approx \sqrt{L_1 L_2}$). Ta cecha zdecydowała o zastosowaniu cewek z rdzeniem ferromagnetycznym do budowy transformatorów, które zbliżają się swoim zachowaniem do transformatorów idealnych.

Jeśli założymy punkt pracy transformatora z rdzeniem ferromagnetycznym w części liniowej charakterystyki magnesowania to układ taki może być traktowany jako transformator liniowy, analogicznie do transformatora powietrznego, ale o wartości współczynnika sprzężenia k bliskim jedności. Schemat zastępczy takiego transformatora przy pominięciu rezystancji uzwojeń jest identyczny jak w przypadku transformatora powietrznego (rys. 5.12). Oznacza to, że ma tu zastosowanie wzór (5.24) określający relację między napięciem pierwotnym i wtórnym transformatora, który wobec zależności $M \approx \sqrt{L_1 L_2}$ można przepisać tutaj w postaci

$$U_2 \approx - \left[\frac{X_M}{X_{L1}} U_1 + I_2 \left(jX_{L2} - j \frac{X_{L1} X_{L2}}{X_{L1}} \right) \right] = - \frac{X_M}{X_{L1}} U_1 \quad (5.38)$$

Jak widać z powyższej zależności dla transformatora z rdzeniem ferromagnetycznym przekładnia napięciowa nie zależy od prądu obciążenia (pod warunkiem że punkt pracy położony jest w liniowej części charakterystyki magnesowania a współczynnik sprzężenia magnetycznego jest równy jedności). Oznacza to, że niezależnie od obciążenia relacja między napięciem pierwotnym i wtórnym dana jest w postaci

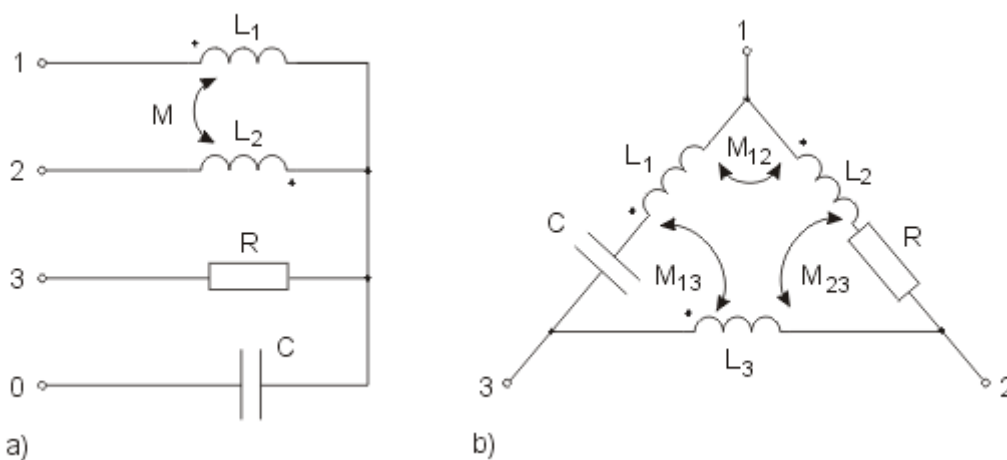
$$|U_2| \approx \frac{X_M}{X_{L1}} |U_1| = \frac{z_2}{z_1} |U_1| \quad (5.39)$$

Napięcie wtórne transformatora jest zależne wyłącznie od przekładni zwojowej i napięcia wejściowego układu. Jest to zatem realizacja podstawowej zależności charakterystycznej dla transformatora idealnego. Przy pominięciu strat w transformatorze relacja między prądem pierwotnym i wtórnym spełnia również drugą zależność transformatora idealnego (wzór 5.17). Wynika stąd wniosek, że transformator z rdzeniem ferromagnetycznym jest dobrym przybliżeniem transformatora idealnego.

4.1 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 5.1

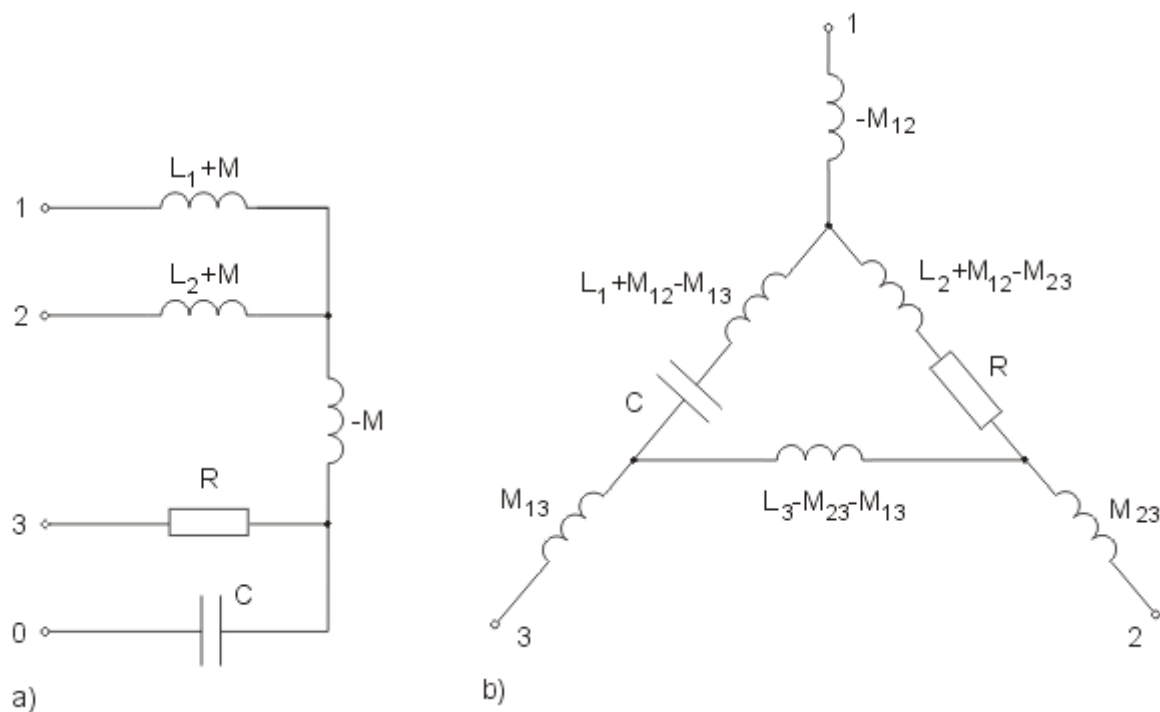
Narysować obwody zastępcze bez sprzężeń magnetycznych odpowiadające obwodom ze sprzężeniami przedstawionym na rys. 5.16a,b.



Rys. 5.16. Schematy obwodów ze sprzężeniami magnetycznymi do zadania 5.1

Rozwiązanie

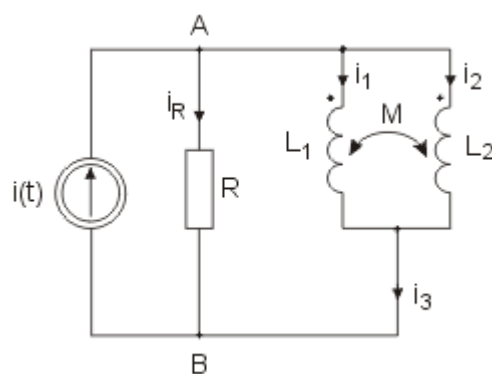
Na rys. 5.17a,b przedstawiono obwody zastępcze nie zawierające sprzężeń magnetycznych. Odpowiadają one obwodom oryginalnym z rys. 5.16 pod względem prądowym.



Rys. 5.17 Obwody bez sprzężeń magnetycznych odpowiadające rys. 5.16

Zadanie 5.2

Wyznaczyć rozkłady prądów w obwodzie przedstawionym na rys. 5.18.

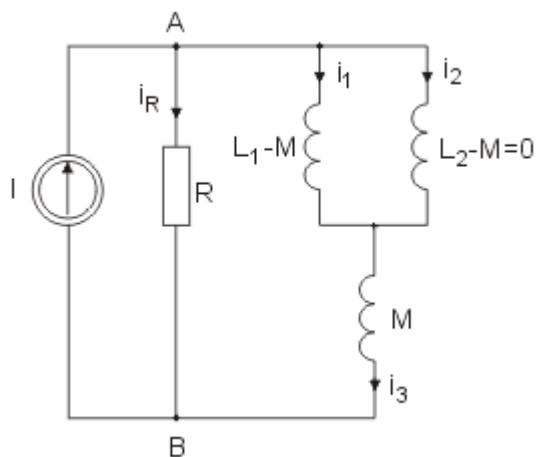


Rys. 5.18 Schemat obwodu elektrycznego ze sprzężeniem magnetycznym do zadania 5.2

Przyjąć następujące wartości parametrów elementów obwodu: $R=5\Omega$, $L_1=2H$, $L_2=2H$, $M=1H$ oraz $i(t) = 5 \sin(t + 45^\circ)$ A.

Rozwiązanie

Postać obwodu po eliminacji sprzężenia magnetycznego przedstawiono na rys. 5.19



Rys. 5.19 Obwód bez sprzężeń magnetycznych odpowiadający schematowi z rys. 5.18.

Wielkości symboliczne charakteryzujące elementy obwodu:

$$I = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ}$$

$$Z_1 = j\omega(L_1 - M) = j1$$

$$Z_2 = j\omega(L_2 - M) = 0$$

$$Z_M = j\omega M = j1$$

Impedancja zastępcza obwodu wobec $Z_2 = 0$

$$Z = \frac{RZ_M}{R + Z_M} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ}$$

Napięcie U_{AB}

$$U_{AB} = ZI = j5$$

Prądy:

$$I_R = \frac{U_{AB}}{R} = j5$$

$$I_1 = 0$$

$$I_2 = I_3 = \frac{U_{AB}}{Z_M} = 5$$

Napięcia na elementach równoległych w obwodzie oryginalnym i zastępczym są sobie równe i wynoszą $U_{AB} = j5$. Można to łatwo sprawdzić w obwodzie oryginalnym obliczając napięcia na cewkach sprzężonych. Mianowicie

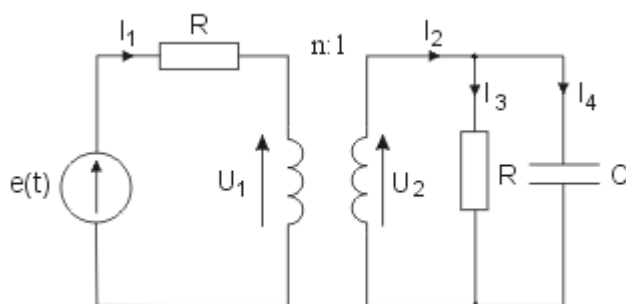
$$U_{L_1} = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 = j5$$

$$U_{L_2} = j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1 = j5$$

Zadanie 5.3

Wyznaczyć rozwiązanie obwodu z rys. 5.20 zawierającego transformator idealny o przekładni zwojowej równej $n=2$. Przyjąć następujące wartości parametrów obwodu:

$$e(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t) \text{ V}, \quad \omega = 1 \text{ rad/s}, \quad R = 5\Omega, \quad C = 0,2\text{F}.$$



Rys. 5.20. Schemat obwodu do zadania 5.3

Rozwiązanie

Wielkości symboliczne charakteryzujące elementy obwodu:

$$E = 10$$

$$Z_C = -j1/\omega C = -j5$$

$$Z_{RC} = \frac{RZ_C}{R + Z_C} = 2,5 - j2,5$$

Układ równań opisujących obwód:

$$E = RI_1 + U_1$$

$$U_1 = nU_2$$

$$I_1 = \frac{1}{n}I_2$$

$$U_2 = I_2 Z_{RC}$$

Po wstawieniu wartości liczbowych otrzymuje się

$$10 = 5I_1 + U_1$$

$$U_1 = 2U_2$$

$$I_1 = \frac{1}{2}I_2$$

$$U_2 = I_2(2,5 - j2,5)$$

Po uproszczeniu tego układu równań otrzymuje się

$$10 = (5 + 10\sqrt{2}e^{-j45^\circ})I_1$$

Stąd

$$I_1 = 0,45 + j0,30$$

$$I_2 = 2I_1 = 0,90 + j0,60$$

$$U_2 = Z_{RC}I_2 = 3,79 - j0,76$$

$$U_1 = 2U_2 = 7,58 - j1,5$$

$$I_3 = \frac{U_2}{R} = 0,75 - j0,15$$

$$I_4 = \frac{U_2}{Z_C} = 0,15 + j0,76$$

Łatwo sprawdzić, że stosunek prądu I_1 do prądu I_2 , $\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2}$, podczas gdy $\frac{U_1}{U_2} = 2$.

Lekcja 6. Rezonans w obwodach elektrycznych

Wstęp

Lekcja szósta poświęcona będzie analizie zjawisk rezonansowych w obwodzie RLC. Zjawiskiem rezonansu nazywamy taki stan obwodu RLC, w którym prąd i napięcie są ze sobą w fazie. W stanie rezonansu przesunięcie fazowe prądu i napięcia jest zerowe, co oznacza, że argument impedancji lub admitancji zespolonej obwodu jest także równy zero. Obwód nie pobiera żadnej mocy biernej a ściśle mówiąc następuje zjawisko kompensacji tej mocy. Moc bierna indukcyjna obwodu jest równa mocy pojemnościowej. Ponieważ znaki mocy biernej indukcyjnej i pojemnościowej są przeciwne, w warunkach rezonansu całkowita moc bierna jest zerowa.

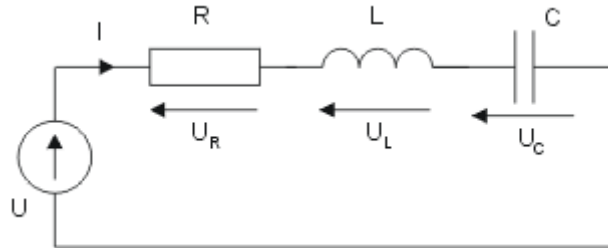
W obwodzie RLC zjawisko rezonansu wymaga, aby reaktancja wypadkowa obwodu (lub jej odwrotność zwana susceptancją) była równa zero. Częstotliwość, przy której reaktancja lub susceptancja obwodu znika jest nazywana częstotliwością rezonansową. Podane zostaną odpowiednie wzory pozwalające na wyznaczenie wartości tej częstotliwości, jak również wprowadzone zostaną inne pojęcia ważne dla zjawiska rezonansu, takie jak dobroć, rozstrojenie bezwzględne i względne, pasmo przepustowe, rezystancja charakterystyczna. Analizie zostaną poddane charakterystyki częstotliwościowe obwodów rezonansowych.

Rezonans wystąpić może w dowolnej konfiguracji elementów RLC, tym nie mniej bada się szczególne połączenia elementów prowadzące do tego zjawiska. Rezonans występujący w obwodzie, w którym elementy R , L , C są połączone szeregowo nazywamy **rezonansem napięć** lub **rezonansem szeregowym**. W przypadku, gdy rezonans dotyczy obwodu równoległego R , L , C taki rezonans nazywamy **rezonansem prądów** lub **rezonansem równoległym**.



6.1. Rezonans szeregowy

Przyjmijmy, że do połączenia szeregowego elementów R, L, C przedstawionego na rys. 6.1.



Rys. 6.1. Obwód rezonansowy szeregowy RLC

jest przyłożone napięcie sinusoidalnie zmienne o wartości skutecznej zespolonej U i pulsacji $\omega = 2\pi f$. Przy zastosowaniu metody symbolicznej w analizie tego obwodu można napisać następujące równanie napięciowe Kirchhoffa

$$U = U_R + U_L + U_C = RI + jX_L I - jX_C I = I[R + j(X_L - X_C)] \quad (6.1)$$

Zjawiskiem rezonansu nazywamy taki stan obwodu RLC, w którym prąd i napięcie są ze sobą w fazie. Zgodnie z tą definicją warunek rezonansu obwodu wymaga, aby prąd I oraz napięcie U były ze sobą w fazie. Osiągnie się to, jeśli część urojona powyższej zależności będzie równa zero, czyli

$$X_L = X_C.$$

Uwzględniając, że $X_L = \omega L$ oraz $X_C = 1/\omega C$ z powyższego warunku otrzymuje się wzór określający pulsację rezonansową ω_r w postaci

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (6.2a)$$

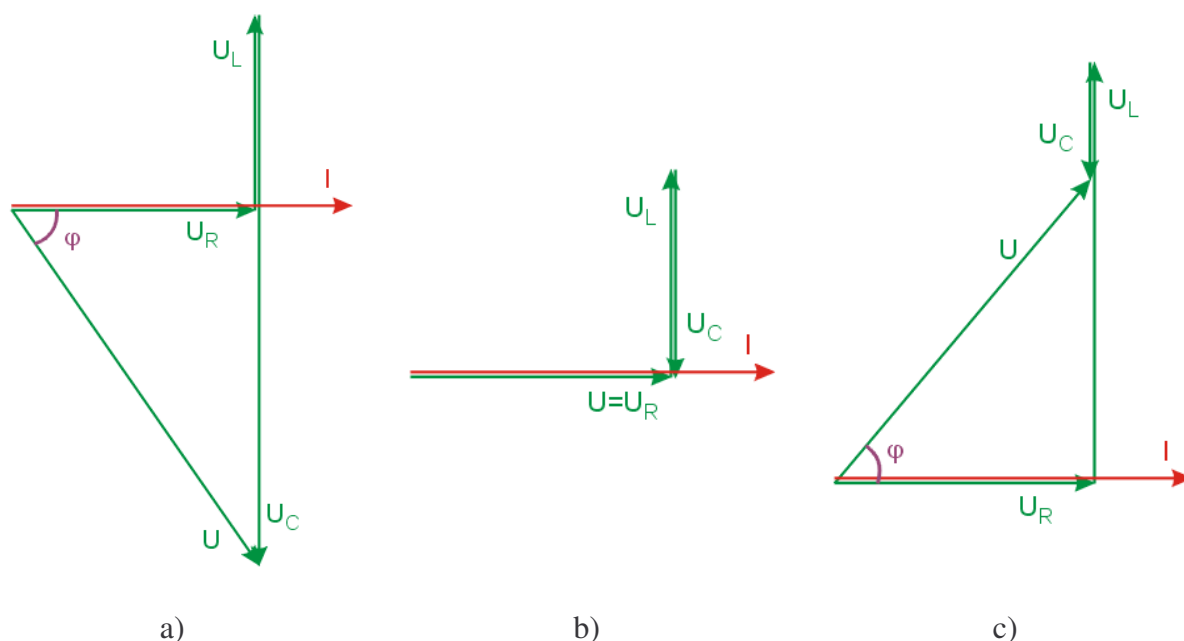
Częstotliwość rezonansowa obwodu wynosi zatem

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (6.2b)$$

Równość reaktancji indukcyjnej i pojemnościowej oznacza, że w stanie rezonansu napięcia na cewce i kondensatorze są równe co do modułu ale przeciwnie skierowane, czyli

$$|U_L| = -|U_C|$$

Zmiana częstotliwości zmienia oczywiście relację między napięciami na tych elementach reaktancyjnych (przeskalowanie wartości). Dla częstotliwości mniejszych niż rezonansowa napięcie na kondensatorze jest większe niż na cewce (przy mniejszej częstotliwości impedancja kondensatora jest większa), a przy częstotliwościach większych niż rezonansowa napięcie na cewce większe niż na kondensatorze (impedancja cewki rośnie wraz ze wzrostem częstotliwości a impedancja kondensatora maleje). Na rys. 6.2 przedstawiono wykresy wektorowe prądu i napięć w obwodzie szeregowym RLC dla częstotliwości mniejszych niż rezonansowa (rys. 6.2a), dla częstotliwości rezonansowej (rys. 6.2b) oraz dla częstotliwości większych niż rezonansowa (rys. 6.2c).



Rys. 6.2 Wykresy wektorowe obwodu rezonansowego RLC: a) stan przed rezonansem, b) stan rezonansu, c) stan po rezonansie



Z przesunięć kątowych między wektorami widoczne jest, że przed rezonansem obwód szeregowy RLC ma charakter pojemnościowy, w czasie rezonansu – rezystancyjny, a dla częstotliwości większych niż rezonansowa – indukcyjny.

6.1.1 Parametry rezonansu szeregowego

Rezonans może być scharakteryzowany wieloma parametrami, z których najważniejsze to częstotliwość rezonansowa, dobroć obwodu rezonansowego, rezystancja charakterystyczna, rozstrojenie obwodu oraz pasmo przenoszenia częstotliwości.

Częstotliwość rezonansowa obwodu szeregowego RLC została zdefiniowana powyżej jako $f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. Jest ona jednoznacznie określona jako funkcja indukcyjności L oraz pojemności C . Rezystancja R nie ma żadnego wpływu na wartość częstotliwości obwodu szeregowego RLC.

Drugim ważnym parametrem obwodu rezonansowego jest **dobroć** Q określana zwykle w punkcie rezonansowym (dla częstotliwości rezonansowej). W obwodzie szeregowym RLC dobrocią nazywamy stosunek napięcia na elemencie reaktancyjnym (kondensatorze lub cewce) do napięcia na elemencie rezystancyjnym w czasie rezonansu. Stąd wartość dobroci może być wyznaczona ze wzoru

$$Q = \frac{|U_L|}{|U_R|} = \frac{|U_C|}{|U_R|} = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r RC} \quad (6.3)$$

Po uwzględnieniu wzoru na pulsację rezonansową, dobroć Q można wyrazić w jednoznacznej postaci uzależnionej wyłącznie od parametrów obwodu RLC

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} \quad (6.3)$$

Wielkość występująca w liczniku nazywana jest **rezystancją charakterystyczną** ρ

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (6.5)$$

Rezystancja charakterystyczna obwodu rezonansowego szeregowego RLC jest uzależniona wyłącznie od wartości indukcyjności i pojemności.

6.1.2 Charakterystyki częstotliwościowe rezonansu

Charakterystykami częstotliwościowymi obwodu rezonansowego nazywać będziemy zależność prądu i napięcia od częstotliwości (pulsacji). Dla otrzymania charakterystyk częstotliwościowych z równania (6.1) wyznaczmy prąd I jako funkcję pulsacji

$$I(\omega) = \frac{U}{R + j\omega L - j1/\omega C} \quad (6.6)$$

Przepisując powyższą zależność zespoloną w postaci wykładniczej otrzymujemy wzór

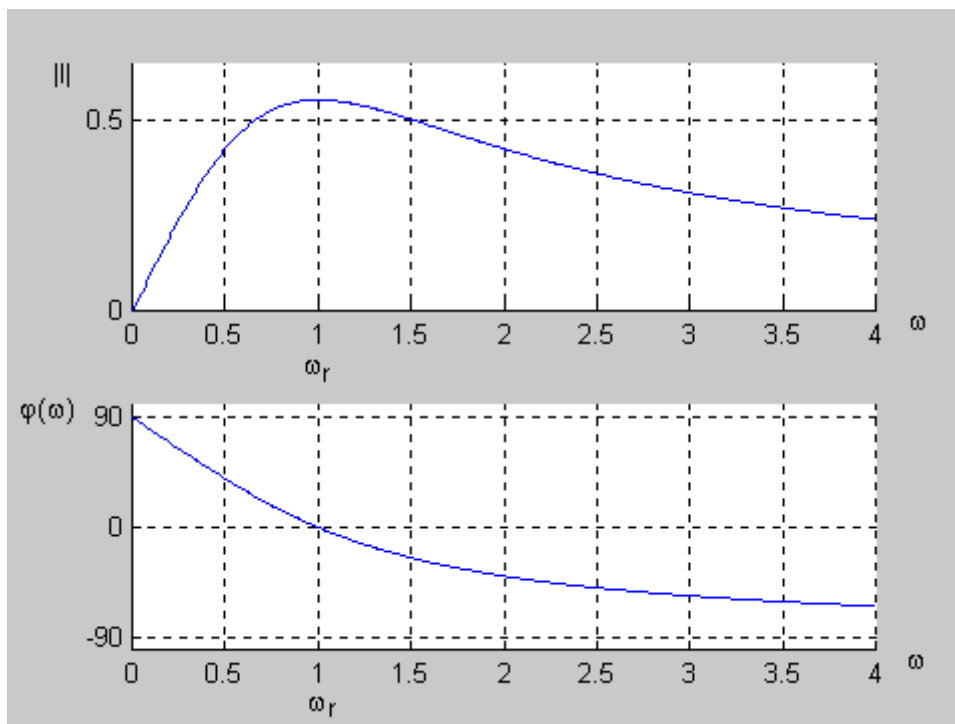
$$I(\omega) = |I(\omega)|e^{j\varphi(\omega)} \quad (6.7)$$

w którym $|I(\omega)|$ oznacza moduł prądu a $\varphi(\omega)$ - fazę uzależnioną od częstotliwości napięcia zasilającego. Wielkości te opisane są następująco

$$|I(\omega)| = \frac{|U|}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (6.8)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \quad (6.9)$$

Zależność modułu od częstotliwości (pulsacji) nazywamy **charakterystyką amplitudową** rezonansu a zależność fazy od częstotliwości (pulsacji) – **charakterystyką fazową**. Na rys. 6.3a przedstawiono charakterystykę modułu prądu a rys. 6.3b – fazy prądu w funkcji pulsacji ω .



Rys. 6.3 Charakterystyki częstotliwościowe prądu w obwodzie rezonansowym:
a) charakterystyka amplitudowa, b) charakterystyka fazowa



Wartości elementów symulowanego obwodu były równe: $L=1H$, $C=1F$, $R=1,8\Omega$. Dla punktu rezonansowego $\omega_r = 1$ charakterystyka przyjmuje wartość maksymalną a faza wartość zerową.

Wraz ze zmianą prądu zmieniają się również napięcia na pozostałych elementach obwodu RLC. Dla wyznaczenia tych zależności można wykorzystać prawo Ohma, zgodnie, z którym przy zastosowaniu podejścia symbolicznego otrzymuje się

- dla indukcyjności

$$U_L(\omega) = j\omega LI(\omega) \quad (6.10)$$

- dla pojemności

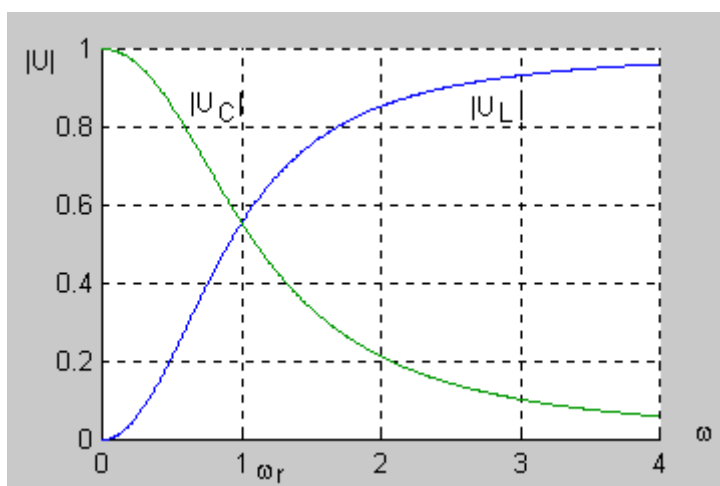
$$U_C(\omega) = -j \frac{I(\omega)}{\omega C} \quad (6.11)$$

Podstawiając do powyższych zależności wzór określający prąd można otrzymać wyrażenia na moduły i fazy napięcia na cewce i kondensatorze. Charakterystyki amplitudowe tych napięć są wyrażone w postaci

$$|U_L(\omega)| = \frac{|U|\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (6.12)$$

$$|U_C(\omega)| = \frac{|U|}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (6.13)$$

Na rys. 6.4 przedstawiono przykładowe charakterystyki częstotliwościowe amplitudowe napięcia na cewce i kondensatorze w obwodzie RLC o podanych wcześniej parametrach przy pulsacji rezonansowej równej jeden i dobroci obwodu $Q = 0,55$.



Rys. 6.4 Charakterystyki amplitudowe napięcia na cewce i kondensatorze



Jak widać dla częstotliwości rezonansowej obwodu napięcia na reaktancjach są sobie równe.

Charakterystyki fazowe napięć na cewce i kondensatorze, jak wynika ze wzorów (6.10) i (6.11) różnią się od charakterystyki fazowej prądu tylko o wartość $\pi/2$ i są przesunięte na osi pionowej bądź w dół bądź w górę. Łatwo pokazać, że są one określone następująco

- Charakterystyka fazowa napięcia cewki

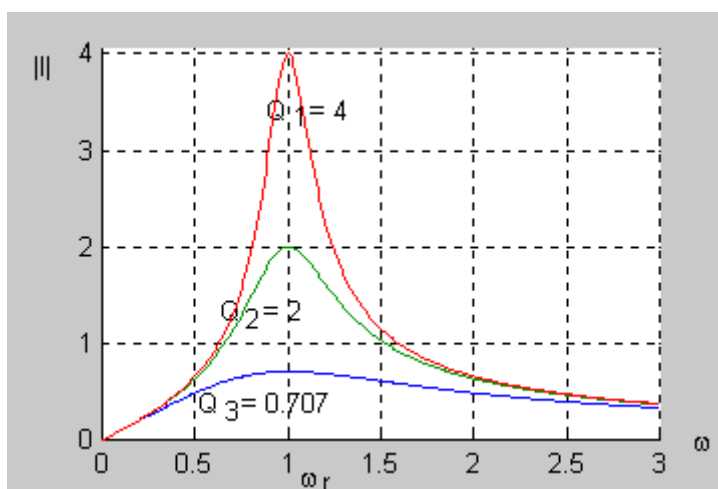
$$\varphi_L(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \quad (6.14)$$

- Charakterystyka fazowa napięcia kondensatora

$$\varphi_C(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \quad (6.15)$$

Kształt charakterystyk fazowych napięcia na cewce i kondensatorze jest identyczny z charakterystyką fazową prądu. Jedynym wyjątkiem jest przesunięcie tych charakterystyk w osi pionowej o wartość kąta równą $\pm 90^\circ$.

Ogromny wpływ na charakterystyki częstotliwościowe zarówno amplitudową jak i fazową wywiera dobroć obwodu. Im wyższa jest dobroć tym charakterystyka prądu w funkcji częstotliwości jest bardziej stroma. Zmniejszenie dobroci powoduje spłaszczenie charakterystyki prądu (gorsza selektywność obwodu rezonansowego).

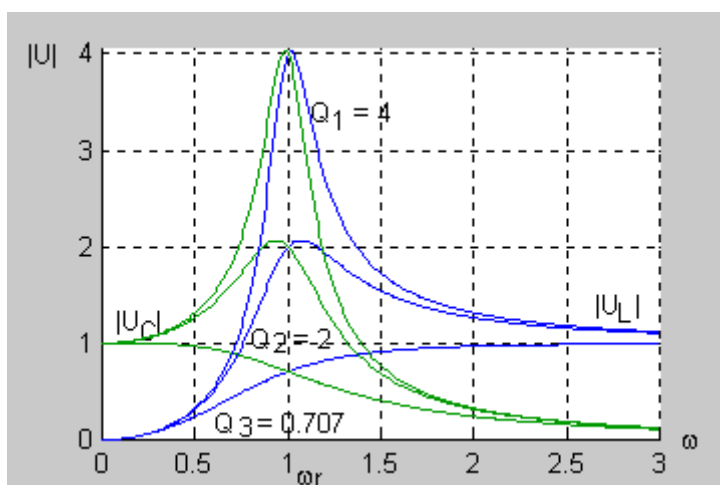


Rys. 6.5 Ilustracja wpływu dobroci na charakterystykę amplitudową prądu



Rys. 6.5 przedstawia wpływ dobroci na charakterystykę amplitudową prądu przy stałej wartości amplitudy napięcia zasilającego. Im większa dobroć tym charakterystyka amplitudowa jest bardziej stroma i węższa.

Na rys. 6.6 zilustrowano wpływ dobroci na charakterystyki amplitudowe napięcia cewki i kondensatora dla tych samych wartości częstotliwości rezonansowej i dobroci jak na rys. 6.6.



Rys. 6.6 Charakterystyki amplitudowe napięcia na cewce i kondensatorze



Zaobserwować można pojawienie się maksimum w charakterystyce zarówno napięcia cewki jak i kondensatora. Łatwo można udowodnić, że punkt maksymalny obu charakterystyk pojawia się jedynie przy dobrociach obwodu większych niż $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Dobroć $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ odpowiada najbardziej płaskiemu przebiegowi charakterystyk amplitudowych.

Dla wprowadzenia następnego parametru obwodu rezonansowego, jakim jest **rozstrojenie bezwzględne**, napiszmy wyrażenie na napięcie rezystora R w postaci

$$\frac{U_R(\omega)}{U} = \frac{R}{R + j(\omega L - 1/\omega C)} \quad (6.16)$$

którą przekształcimy następująco

$$\frac{U_R(\omega)}{U} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} e^{-j \arctg x} \quad (6.17)$$

Wielkość

$$x = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \quad (6.18)$$

nosi nazwę rozstrojenia bezwzględnego obwodu rezonansowego RLC. Rozstrojenie bezwzględne jest proporcjonalne do wartości całkowitej reaktancji obwodu przy określonej częstotliwości. Rozstrojenie jest równe zero tylko dla punktu rezonansowego. Rozstrojenie bezwzględne jest pewnego rodzaju wskaźnikiem odstrojenia obwodu od rezonansu. Przyjmuje wartości z przedziału $(-\infty, \infty)$.

Stopień odstrojenia pulsacji od wartości rezonansowej określa poza rozstrojeniem bezwzględnym, również **rozstrojenie względne**, definiowane za pomocą wzoru

$$\delta = \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \quad (6.19)$$

Można łatwo pokazać, że rozstrojenie bezwzględne x obwodu RLC jest powiązane z rozstrojeniem względnym δ relacją

$$x = Q\delta = \frac{\delta \rho}{R} \quad (6.20)$$

Zależność ta wskazuje, że przy tym samym rozstrojeniu bezwzględnym x w obwodzie o większej dobroci Q występuje mniejsze rozstrojenie względne. W większości zastosowań charakterystyki rezonansowe obwodu wykorzystywane są w bliskim otoczeniu pulsacji rezonansowej. W takich warunkach można zastosować następujące przybliżone wzory na rozstrojenie względne i bezwzględne

$$\delta = \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} = \frac{(\omega + \omega_r)(\omega - \omega_r)}{\omega \omega_r} \cong 2 \frac{\omega - \omega_r}{\omega_r} \quad (6.21)$$

$$x = Q\delta \cong 2Q \frac{\omega - \omega_r}{\omega_r} \quad (6.22)$$

Istotnym parametrem obwodu rezonansowego jest **pasma przepustowe**. Pasmem przepustowym (przepuszczania) szeregowego obwodu rezonansowego RLC nazywamy

przedział częstotliwości (f_1, f_2) w otoczeniu częstotliwości rezonansowej f_r , na krańcach którego wartość skuteczna sygnału napięcia na rezystorze R w obwodzie jest równa $U_R = \frac{|U|}{\sqrt{2}}$ (spadek wartości charakterystyki logarytmicznej $20\log_{10} \frac{|U_R|}{|U|}$ o 3dB w stosunku do wartości maksymalnej). Jest to tak zwane pasmo 3 decybelowe. Oznacza to, że w paśmie przepustowym zachodzi zależność

$$\frac{|U_R|}{|U|} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (6.23)$$

Można udowodnić, że 3 decybelowe pasmo przepustowe (f_2-f_1) obwodu rezonansowego określone jest zależnością

$$f_2 - f_1 = \frac{f_r}{Q} \quad (6.24)$$

Im wyższa dobroć Q obwodu tym jest ono węższe, natomiast zmniejszenie dobroci obwodu rozszerza to pasmo.

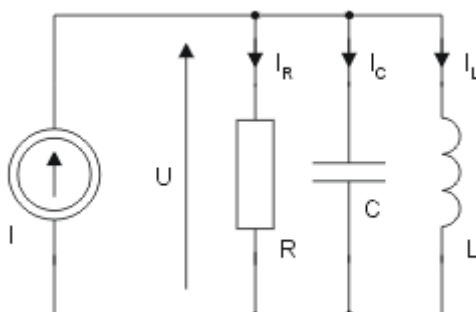
Zjawiska w obwodzie rezonansowym odgrywają ważną rolę w technice przetwarzania sygnałów. Układy rezonansowe wchodzi w skład zarówno generatorów harmoniczych jak i filtrów elektrycznych i elektronicznych. Dzięki właściwości przenoszenia lub tłumienia sygnałów w określonym paśmie częstotliwości wykorzystuje się je jako układy dostrajające w radioodbiornikach i telewizorach. W liniach teletransmisyjnych układy rezonansowe umożliwiają przekazywanie wielu sygnałów za pomocą jednej linii przesyłowej przy zastosowaniu różnych częstotliwości.

6.2 Rezonans równoległy

Rezonans prądów zwany również **rezonansem równoległym** może wystąpić w obwodzie zawierającym połączenie równoległe elementów RLC. Istnieje wiele struktur obwodów, w których może powstać rezonans prądów. Warunkiem jest pojawienie się równoległego połączenia cewki i kondensatora, przy czym zarówno cewka jak i kondensator może być w układzie połączeń z innymi elementami rezystancyjnymi.

6.2.1 Zależności podstawowe rezonansu prądów

Na rys. 6.7 przedstawiono przykładowy najprostszy obwód rezonansu równoległego RLC.



Rys. 6.7 Obwód rezonansowy równoległy RLC

Podobnie jak w przypadku obwodu szeregowego przyjmijmy wymuszenie sinusoidalne o zmiennej częstotliwości, ale tym razem założymy je w postaci źródła prądowego $i(t) = I_m \sin(\omega t)$. Wykorzystując w opisie obwodu metodę symboliczną równanie prądowe Kirchhoffa dla tego obwodu przyjmie postać

$$I = I_R + I_L + I_C = GU + j\omega CU - jU / \omega L = U[G + j(\omega C - 1/\omega L)] \quad (6.25)$$

Warunkiem rezonansu równoległego jest przyjęcie przez kąt fazowy między prądem I oraz napięciem U wartości równej zero. Nastąpi to wtedy, gdy część urojona zależności (6.25) przyjmie wartość zerową, czyli gdy

$$\omega C = \frac{1}{\omega L} \rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (6.26)$$

Warunek powyższy będzie spełniony, gdy częstotliwość zasilania przyjmie wartość częstotliwości rezonansowej określonej zależnością

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (6.27)$$

Jak widać częstotliwość rezonansowa w obwodzie równoległym z rys. 6. 7 jest określona identycznym wzorem jak w obwodzie szeregowym RLC. W odróżnieniu od obwodu szeregowego w obwodzie równoległym dobrocią nazywamy stosunek prądu I_L lub I_C (są sobie równe w chwili rezonansu) do prądu I_R w elemencie rezystancyjnym I_R

$$Q = \frac{|I_L|}{|I_R|} = \frac{|I_C|}{|I_R|} = \frac{\omega_r C}{G} = \frac{1}{\omega_r GL} \quad (6.28)$$

Po uwzględnieniu $G = 1/R$ i wzoru (6.27) na częstotliwość rezonansową otrzymuje się relację określającą dobroć równoległego obwodu rezonansowego RLC o strukturze przedstawionej na rys. 6.7 w postaci

$$Q = \frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \quad (6.29)$$

Tym razem dobroć obwodu jest wprost proporcjonalna do wartości rezystancji a odwrotnie proporcjonalna do rezystancji charakterystycznej. Dobroć obwodu wzrasta więc ze wzrostem wartości rezystancji, odwrotnie niż to miało miejsce w obwodzie rezonansu szeregowego (przy większej rezystancji równoległej płynie przez nią mniejszy prąd upływnościowy).

6.2.2 Charakterystyki częstotliwościowe obwodu rezonansowego równoległego

Dobroć Q , podobnie jak w obwodzie rezonansu szeregowego, ma ogromny wpływ na charakterystyki częstotliwościowe obwodu RLC. Zauważmy, że z równania (6.25) można wyznaczyć napięcie na elementach R, L, C w postaci

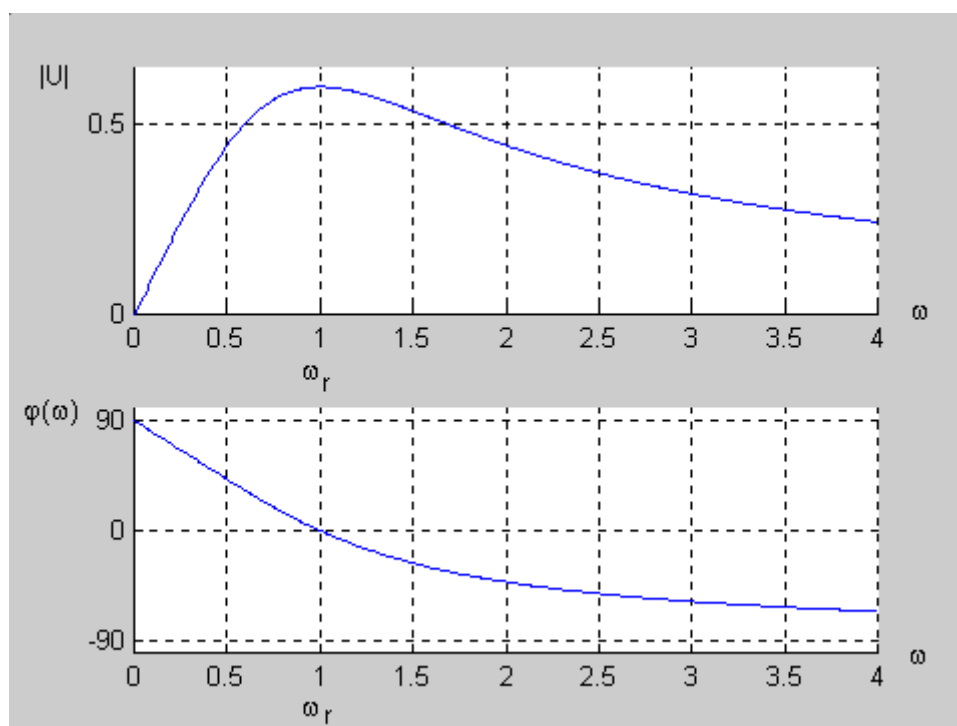
$$U(\omega) = \frac{I}{G + j\omega C - j1/\omega L} = |U(\omega)|e^{j\varphi(\omega)} \quad (6.30)$$

w którym $|U(\omega)|$ oznacza moduł napięcia a $\varphi(\omega)$ - fazę uzależnioną od częstotliwości prądu zasilającego. Wielkości te opisane są następującą funkcją

$$|U(\omega)| = \frac{|I|}{\sqrt{G^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}} \quad (6.31)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{\omega C - 1/\omega L}{G} \quad (6.32)$$

Na rys. 6.8a przedstawiono charakterystykę modułu napięcia (charakterystykę amplitudową) a rys. 6.8b wykres fazy napięcia (charakterystykę fazową) w funkcji pulsacji ω dla obwodu rezonansowego o $\omega_r = 1$ i dobroci $Q=0,6$.



Rys. 6.8 Charakterystyka amplitudowa (a)
i fazowa (b) napięcia w obwodzie równoległym RLC



W punkcie rezonansowym (częstotliwość zasilania równa częstotliwości rezonansowej) charakterystyka amplitudowa przyjmuje wartość maksymalną a faza wartość zerową. Charakterystyki te są analogiczne do charakterystyk dla obwodu szeregowego przy uwzględnieniu formalnych zmian występujących we wzorach (prąd w obwodzie szeregowym odpowiada napięciu na połączeniu równoległym elementów). Zmiana kształtu charakterystyk częstotliwościowych obwodu równoległego na skutek zmian dobroci jest również identyczna

jak miało to miejsce w obwodzie szeregowym RLC. Odpowiednikiem napięcia na elementach L i C w obwodzie szeregowym jest prąd tych elementów w obwodzie równoległym. Zachowanie się tych charakterystyk w funkcji pulsacji wynika z prawa Ohma dla cewki i kondensatora, to jest

$$I_C(\omega) = j\omega CU(\omega)$$

oraz

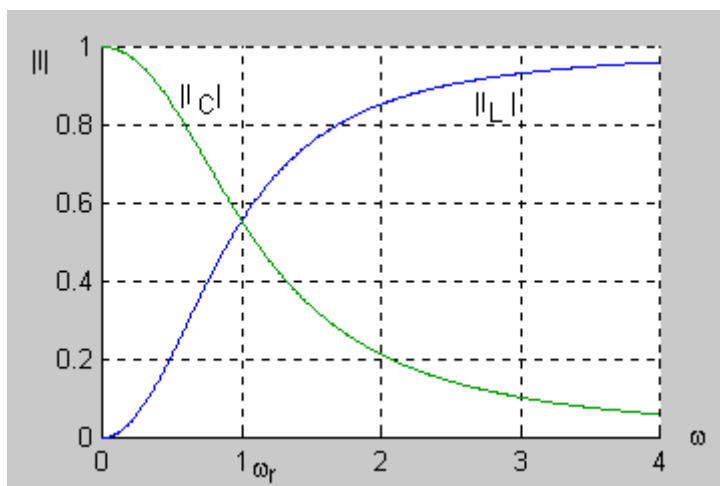
$$I_L(\omega) = -jU(\omega) / \omega L$$

Ograniczając się jedynie do charakterystyk amplitudowych można łatwo wykazać, że charakterystyki te opisują się następującymi wzorami

$$|I_C(\omega)| = \frac{|I|\omega C}{\sqrt{G^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}} \quad (6.33)$$

$$|I_L(\omega)| = \frac{|I|}{\omega L \sqrt{G^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}} \quad (6.34)$$

Na rys. 6.9 przedstawiono charakterystyki amplitudowe prądu cewki i kondensatora w funkcji pulsacji dla dobroci $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ wynikające z relacji (6.33) i (6.34).



Rys. 6.9 Charakterystyki amplitudowe prądu cewki i kondensatora



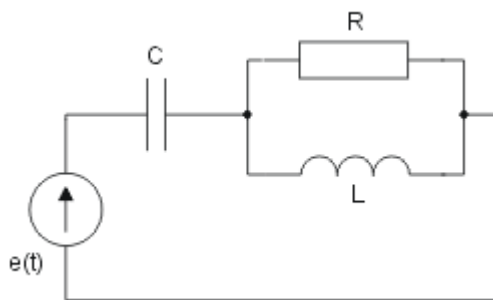
Zmiana dobroci obwodu wpływa w zasadniczy sposób na przebieg tych charakterystyk. Można łatwo udowodnić, że dla dobroci $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ pojawiają się punkty ekstremalne (maksima) w obu charakterystykach, podobnie jak przy rezonansie szeregowym, przy czym występuje przesunięcie tych maksimów względem punktu rezonansowego. Przesunięcie to maleje wraz ze zwiększaniem się dobroci. Przy dobroci $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ punkty ekstremalne w obu charakterystykach nie występują a przebieg charakterystyk amplitudowych staje się monotoniczny.

Rezonans równoległy podobnie jak szeregowy ma główne zastosowanie w układach filtrów i generatorów, gdzie pełni rolę układu wzmacniającego sygnały w określonym zakresie częstotliwości i tłumiącego w pozostałym.

Zadania sprawdzające

Zadanie 6.1

Określić warunek rezonansu w obwodzie przedstawionym na rys. 6.10 przy założeniu wymuszenia sinusoidalnego. Wyznaczyć częstotliwość, przy której w obwodzie nastąpi rezonans. Przyjąć następujące znormalizowane wartości parametrów obwodu: $R=10\Omega$, $L=1H$ oraz $C=1F$.



Rys. 6.10 Schemat obwodu do zadania 6.10

Rozwiązanie

Impedancja zastępcza obwodu określona jest wzorem

$$Z = -j \frac{1}{\omega C} + \frac{j\omega LR}{R + j\omega L} = \frac{10\omega^3}{100 + \omega^2} + j \frac{99\omega^2 - 100}{100 + \omega^2}$$

Warunek rezonansu:

$$\text{Im}(Z) = 0 \rightarrow 99\omega^2 - 100 = 0$$

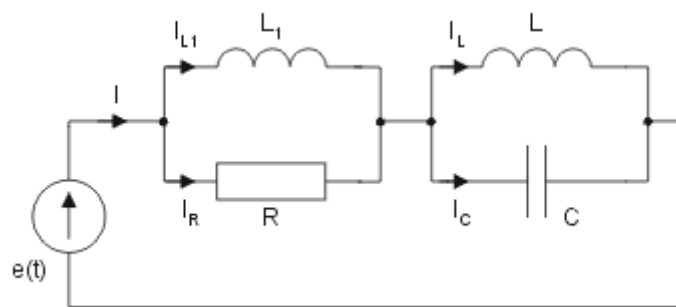
Stąd częstotliwość, przy której wystąpi rezonans jest określona wzorem

$$\omega_r = \sqrt{\frac{100}{99}}$$

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{100}{99}} = 0,16\text{Hz}$$

Zadanie 6.2

Wyznaczyć pojemność C , przy której w obwodzie z rys. 6.11 zachodzi rezonans szeregowy.



Rys. 6.11 Schemat obwodu do zadania 6.2

Wymuszenie w obwodzie dane jest w postaci $e(t) = 50\sqrt{2} \sin(4000t)$. W warunkach rezonansu wyznaczyć prądy i napięcia w obu obwodach. Przyjąć następujące wartości parametrów obwodu: $R=1000\Omega$, $L=0,25\text{H}$, $L_1=0,5\text{H}$.

Rozwiązanie

Impedancja zastępcza obwodu określona jest wzorem

$$Z = \frac{j\omega L_1 R}{j\omega L_1 + R} + \frac{j\omega L \left(-j\frac{1}{\omega C} \right)}{j\omega L - j\frac{1}{\omega C}}$$

Po wstawieniu wartości parametrów otrzymuje się

$$Z = 800 + j400 - \frac{j1000}{4 \cdot 10^6 C - 1} = \frac{32 \cdot 10^8 C - 800}{4 \cdot 10^6 C - 1} + j \frac{16 \cdot 10^8 C - 1400}{4 \cdot 10^6 C - 1}$$

Jak z powyższego wzoru wynika, w obwodzie możliwy jest zarówno rezonans szeregowy jak i równoległy. W przypadku rezonansu szeregowego wymaganego w treści zadania warunek jest następujący

$$\text{Im}(Z) = 0 \rightarrow 16 \cdot 10^8 C - 1400 = 0$$

Stąd

$$C = \frac{1400}{16 \cdot 10^8} = 875 \text{ nF}$$

W warunkach rezonansu poszczególne impedancje obwodu wynoszą

$$Z_{RL} = 800 + j400$$

$$Z_{LC} = -j400$$

Prądy i napięcia w obwodzie:

$$I = \frac{E}{Z_{RL} + Z_{LC}} = 0,0625 \text{ A}$$

$$U_{RL} = Z_{RL} I = 50 + j25$$

$$I_{L1} = \frac{U_{RL}}{j\omega L_1} = 0,0125 - j0,025$$

$$I_R = \frac{U_{RL}}{R} = 0,05 + j0,025$$

$$U_{LC} = Z_{LC} I = -25j$$

$$I_L = \frac{U_{LC}}{j\omega L} = -0,025$$

$$I_C = \frac{U_{LC}}{-\frac{j}{\omega C}} = 0,0875$$

Lekcja 7. Analiza obwodów RLC przy wymuszeniu niesinusoidalnym

Wstęp

W tej lekcji zajmiemy się analizą obwodów liniowych RLC w stanie ustalonym przy wymuszeniach okresowych niesinusoidalnych. Odpowiedzi takich obwodów są w ogólności również funkcjami okresowymi niesinusoidalnymi. Wiele urządzeń elektrycznych generuje sygnały okresowe o kształcie różniącym się od sinusoidy. Mogą to być prostowniki diodowe lub tyrystorowe, transformatory przeciążone pracujące w zakresie nieliniowości krzywej magnesowania, generatory uniwersalne napięć prostokątnych, piłokształtnych itp. Okresowe przebiegi niesinusoidalne nazywać będziemy również odkształconymi, uznając przebiegi sinusoidalne za najbardziej elementarne przebiegi okresowe.

Istnieje konieczność opracowania metodyki analizy obwodów zawierających sygnały niesinusoidalne. Podstawowym problemem w analizie tych obwodów jest wyrażenie przebiegów niesinusoidalnych poprzez funkcje sinusoidalne, dla których analiza jest bardzo prosta. Metodą powszechnie stosowaną jest rozwinięcie funkcji czasowych opisujących przebieg niesinusoidalny w szereg Fouriera.

Zostanie pokazane, że dowolne okresowe wymuszenie różne od sinusoidalnego może być przedstawione jako suma wielu wymuszeń harmoniczných (sinusoidalnych) o częstotliwościach będących wielokrotnością częstotliwości podstawowej. Rozwinięcie szeregu Fouriera zostanie zaprezentowane tutaj w postaci trygonometrycznej oraz wykładniczej. Wprowadzone zostanie twierdzenie Parsevala, pozwalające wyrazić wartość średnią za okres iloczynu dwu funkcji okresowych poprzez współczynniki rozwinięcia wykładniczego Fouriera obu funkcji. Podane zostaną wzory na wartość skuteczną przebiegów niesinusoidalnych oraz na moce występujące w obwodzie o przebiegach niesinusoidalnych. Wprowadzone zostanie nowe pojęcie mocy – moc odkształcenia (deformacji). Poznamy metodę analizy obwodów ze źródłami niesinusoidalnymi w stanie ustalonym przy zastosowaniu zasady superpozycji.



7.1. Szereg Fouriera

7.1.1. Wprowadzenie

Zgodnie z twierdzeniem Fouriera funkcję okresową $f(t)$ o okresie T (częstotliwość $f=1/T$) można przedstawić w postaci szeregu utworzonego ze składowej stałej oraz funkcji sinusoidalnych o częstotliwościach kf jeśli funkcja ta spełnia tak zwane **warunki Dirichleta**.

Niech dana będzie funkcja okresowa $f(t)$ określona w przedziale $0-T$, gdzie T oznacza okres tej funkcji. Załóżmy, że funkcja ta spełnia warunki Dirichleta, to znaczy, że w przedziale $0-T$ jest bezwzględnie całkowalna, czyli

$$\int_T |f(t)| dt < \infty \quad (7.1)$$

ma skończoną liczbę maksimów i minimów a w przedziale $0-T$ co najwyżej skończoną liczbę punktów nieciągłości t_k , przy czym w każdym punkcie nieciągłości istnieją skończone granice prawostronna i lewostronna a wartość funkcji w tym punkcie przyjmuje się jako średnią arytmetyczną granicy lewo- i prawostronnej, to jest

$$f(t_k) = \frac{1}{2} [f(t_{k-}) + f(t_{k+})] \quad (7.2)$$

7.1.2. Postać trygonometryczna szeregu Fouriera

Każda funkcja okresowa spełniająca wymienione warunki Dirichleta może być wyrażona za pomocą nieskończonego, zbieżnego szeregu Fouriera. Suma tego szeregu dla dowolnego punktu czasu t jest równa wartości funkcji $f(t)$, co znaczy

$$f(t) = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} F_k \sin(k\omega t + \psi_k) \quad (7.3)$$

lub

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t)] \quad (7.4)$$

Szereg po prawej stronie równań (7.3) i (7.4) nazywać będziemy **szeregiem trygonometrycznym Fouriera**. W szeregu tym wyróżnić należy następujące parametry

k	- rząd harmoniczej ($k = 1, 2, 3, \dots$)
F_k	- amplituda k -tej harmoniczej
$F_0 = A_0$	- składowa stała przebiegu
ψ_k	- faza początkowa k -tej harmoniczej
$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$	- pulsacja harmoniczej podstawowej
$F_1 \sin(\omega t + \psi_1)$	- podstawowa harmoniczna przebiegu
$F_k \sin(k\omega t + \psi_k)$	- k -ta harmoniczna przebiegu ($k = 1, 2, 3, \dots$)

Należy podkreślić, że częstotliwość harmoniczej podstawowej jest identyczna z częstotliwością przebiegu niesinusoidalnego $f(t)$. Częstotliwości kolejnych harmoniczych są wielokrotnością częstotliwości harmoniczej podstawowej, czyli $\omega_k = k\omega$. Współczynniki rozwinięcia trygonometrycznego Fouriera wyznacza się z następujących wzorów

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) dt \quad (7.5)$$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) \cos(k\omega t) dt \quad (7.6)$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) \sin(k\omega t) dt \quad (7.7)$$

Chwila czasowa t_0 może być wybrana dowolnie a jej wybór nie ma wpływu na wynik transformacji. Obie postacie szeregu Fouriera (7.3) i (7.4) są sobie równoważne, jeśli spełnione są następujące warunki

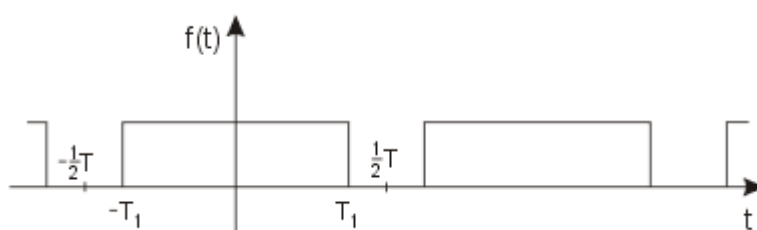
$$F_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad (7.8)$$

$$\psi_k = \arctg \frac{A_k}{B_k} \quad (7.9)$$

W ogólności szereg Fouriera zawiera nieskończenie wiele harmonicznych. W praktyce większość harmonicznych maleje do zera przy zwiększającym się rzędzie tych harmonicznych. Stąd w obliczeniach uwzględnia się jedynie niewielką liczbę tych harmonicznych uzyskując zadowalające przybliżenie. Metodę rozkładu przebiegu niesinusoidalnego na szereg Fouriera zilustrujemy na przykładzie przebiegu prostokątnego.

Przykład 7.1

Wyznaczyć rozwinięcie Fouriera dla przebiegu prostokątnego okresowego o okresie T przedstawionego na rys. 7.1



Rys. 7.1. Przebieg prostokątny okresowy

Rozwiązanie

Dla przebiegu podanego na rys. 7.1 pulsacja $\omega = 2\pi / T$. Poszczególne współczynniki rozwinięcia trygonometrycznego Fouriera opisane są wzorami

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} A dt = 2A \frac{T_1}{T}$$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T_1}^{T_1} A \cos(k\omega t) dt = \frac{2A}{\pi \cdot k} \sin(2\pi \cdot k \frac{T_1}{T})$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T_1}^{T_1} A \sin(k\omega t) dt = 0$$

Z uzyskanych wzorów na współczynniki Fouriera wynika, że zadany przebieg czasowy prostokątny opisać można w postaci nieskończonej sumy harmonicznych o postaci

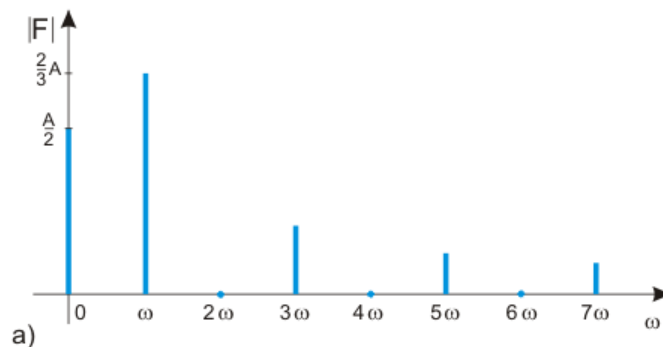
$$f(t) = 2A \frac{T_1}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2A}{\pi \cdot k} \sin(2k\pi \frac{T_1}{T}) \right] \cos(k\omega t)$$

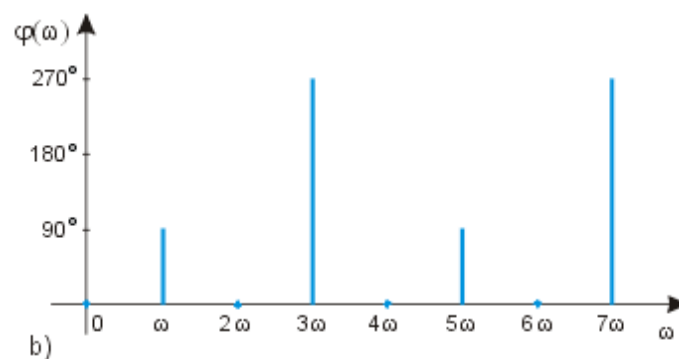
Wyrażenie o postaci sinusoidalnej stojące przy $\cos(k\omega t)$ oznacza amplitudę k -tej harmonicznej. Jak widać wartość tej amplitudy maleje wraz ze wzrostem k . W ogólnym przypadku przy dowolnej wartości T_1 rozwinięcie w szereg Fouriera zawierać może wszystkie harmoniczne, przy czym amplitudy tych harmonicznych są modulowane funkcją sinusoidalną.

Szczególnie prostą formę przyjmuje rozwinięcie w szereg Fouriera przy wypełnieniu impulsów prostokątnych w stosunku 1:1. Wtedy $T_1 = T / 4$ a rozwinięcie $f(t)$ upraszcza się do postaci

$$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \cos(\omega t) - \frac{2A}{3\pi} \cos(3\omega t) + \frac{2A}{5\pi} \cos(5\omega t) - \frac{2A}{7\pi} \cos(7\omega t) + \dots$$

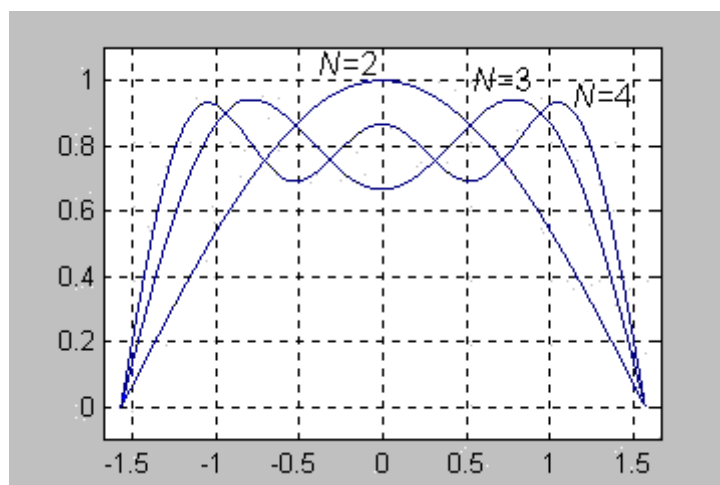
W tym przypadku szereg Fouriera zawiera jedynie harmoniczne nieparzyste a amplituda k -tej harmonicznej jest k -krotnie mniejsza niż harmonicznej podstawowej. Kolejne składniki rozwinięcia różnią się znakiem (znak minus odpowiada wprowadzeniu przesunięcia fazowego o kąt 180°). Rys. 7.2 przedstawia wykres amplitudy i fazy poszczególnych składowych rozkładu Fouriera (w przypadku fazy przyjęto $\cos \omega t = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$).





Rys. 7.2. Wykres amplitudy (a) i fazy (b) składowych rozkładu Fouriera

Rozkład przebiegu niesinusoidalnego na składowe harmoniczne oznacza jego aproksymację poprzez nieskończoną sumę składników. Każde ograniczenie tej sumy do liczby skończonej wprowadza pewien błąd aproksymacji, a więc przybliżenie przebiegu rzeczywistego przez funkcje aproksymujące. Na rys. 7.3 przedstawiono efekty przybliżania przebiegu prostokątnego przez ograniczoną sumę harmonicznnych przy coraz większej ich liczbie uwzględnianej w aproksymacji ($N=2$, $N=3$, $N=4$ uwzględniając składową zerową).



Rys. 7.3. Przybliżenie impulsu prostokątnego przez skończoną sumę harmonicznnych



Jak widać pomimo uwzględnienia w rozwinięciu jedynie 4 harmonicznnych przybliżenie jest dość dokładne i odzwierciedla podstawowy kształt impulsu. Zwiększenie liczby harmonicznnych uwzględnione w sumie zwiększa dokładność odwzorowania impulsu.

7.1.3. Postać wykładnicza szeregu Fouriera

W pewnych zastosowaniach postać trygonometryczna (7.3) szeregu Fouriera nie jest wystarczająca i dlatego wprowadza się komplementarną postać wykładniczą, będącą rozwinięciem funkcji trygonometrycznych w funkcje wykładnicze. Korzysta się przy tym z definicji funkcji sinusoidalnej i cosinusoidalnej, zgodnie z którymi

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \quad (7.10)$$

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \quad (7.11)$$

Po zastosowaniu elementarnych przekształceń wzoru (7.4) otrzymuje się

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A_k - jB_k}{2} \right) e^{-jk\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A_k + jB_k}{2} \right) e^{jk\omega t} \quad (7.12)$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$X_k = \frac{A_k - jB_k}{2} \quad (7.13)$$

oraz

$$X_{-k} = \frac{A_{-k} - jB_{-k}}{2} \quad (7.14)$$

Ze względu na parzystość funkcji cosinusoidalnej i nieparzystość funkcji sinusoidalnej słuszne są następujące równości

$$A_k = A_{-k} \quad (7.15)$$

$$B_k = -B_{-k} \quad (7.16)$$

Oznacza to, że

$$X_{-k} = \frac{A_k + jB_k}{2} = X_k^* \quad (7.17)$$

gdzie znak * oznacza sprzężenie liczby zespolonej. Uwzględnienie tej zależności we wzorze (7.12) prowadzi do wyniku

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{jk\omega t} + \sum_{k=-1}^{-\infty} X_k e^{jk\omega t} \quad (7.18)$$

który może zostać zapisany w skrócie jako

$$f(t) = A_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} X_k e^{jk\omega t} \quad (7.19)$$

Jest to tak zwana postać wykładnicza szeregu Fouriera, w której wartości współczynników rozwinięcia X_k są zespolone w odróżnieniu od rzeczywistych wartości współczynników szeregu trygonometrycznego. Współczynniki te mogą być otrzymane z rozwinięcia trygonometrycznego bądź bezpośrednio z relacji

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jk\omega t} dt \quad (7.20)$$

Wykres $|X_k|$ określony dla dyskretnych wartości k reprezentujących sobą dyskretne częstotliwości nazywany jest **widmem amplitudowym** funkcji $f(t)$. Ze względu na to, że współczynniki rozwinięcia wykładniczego spełniają warunek $|X_k| = |X_{-k}|$, widmo amplitudowe jest symetryczne względem osi rzędnych (wartości widma amplitudowego dla dodatnich i ujemnych częstotliwości są identyczne). Z kolei wykres $\arg X_{-k} = -\arg X_k$, czyli **widmo fazowe** jest symetryczne względem początku układu współrzędnych (wartości kąta fazowego dla częstotliwości ujemnych są przeciwne względem tych samych wartości dla częstotliwości dodatnich).

Rozwinięcie funkcji $f(t)$ w postać wykładniczą oznacza rozkład energii sygnału w zakresie częstotliwości dodatniej i ujemnej. Jeśli rzeczywista wartość amplitudy k -tej harmonicznej wynosi A_k , to k -ty prążek widma amplitudowego szeregu wykładniczego Fouriera przyjmie wartość $\frac{A_k}{2}$ dla częstotliwości dodatniej i identyczną wartość dla częstotliwości ujemnej.

Przykład 7.2

Wyznaczyć postać wykładniczą szeregu Fouriera, jeśli

$$f(t) = 5 + 10\cos(\omega t) + 5\sin(\omega t) + 7\cos(3\omega t) + 12\sin(5\omega t)$$

Rozwiązanie

Dla uzyskania postaci wykładniczej szeregu Fouriera skorzystamy z zależności definicyjnych funkcji sinusoidalnej i kosinusoidalnej: $\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$, $\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$. Po wstawieniu tych zależności do szeregu Fouriera otrzymujemy

$$f(t) = 5 + 10\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} + 5\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} + 7\frac{e^{j3\omega t} + e^{-j3\omega t}}{2} + 12\frac{e^{j5\omega t} - e^{-j5\omega t}}{2j}$$

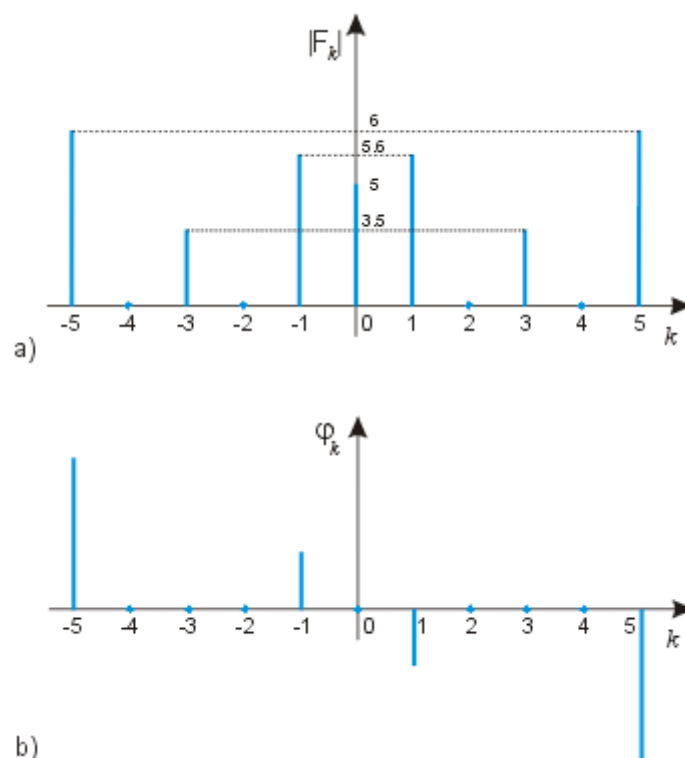
Uwzględniając, że $j = e^{j\pi/2}$ i grupując odpowiednie składniki otrzymujemy

$$f(t) = 6e^{j\pi/2}e^{-j5\omega t} + \frac{7}{2}e^{-j3\omega t} + (5 + 2,5j)e^{-j\omega t} + 5 + (5 - 2,5j)e^{j\omega t} + \frac{7}{2}e^{j3\omega t} + 6e^{-j\pi/2}e^{j5\omega t}$$

Po sprowadzeniu liczb zespolonych do postaci wykładniczej otrzymuje się następującą postać wykładniczą szeregu Fouriera

$$f(t) = 6e^{j90^\circ}e^{-j5\omega t} + 3,5e^{-j3\omega t} + 5,6e^{j26,5^\circ}e^{-j\omega t} + 5 + 5,6e^{-j26,5^\circ}e^{j\omega t} + 3,5e^{j3\omega t} + 6e^{-j90^\circ}e^{j5\omega t}$$

Charakterystyka amplitudowa szeregu wykładniczego Fouriera opisującego funkcję $f(t)$ przedstawiona jest na rys. 7.4a, natomiast charakterystyka fazowa na rys. 7.4b.



Rys. 7.4 Charakterystyka amplitudowa (a) i fazowa (b) szeregu wykładniczego Fouriera opisującego funkcję $f(t)$ z przykładu

Częstotliwość zmienia się w zakresie od $-\infty$ do ∞ . Prążki amplitudowe i fazowe zostały rozłożone w sposób symetryczny w obu zakresach, przy czym charakterystyka amplitudowa jest funkcją parzystą a charakterystyka fazowa - nieparzystą. Energia sygnału utożsamiona z amplitudą została zatem rozdzielona na dwie równe części. Amplituda k -tej harmonicznej jest równa podwojonej wartości amplitudy k -tego prążka z zakresu dodatniego lub ujemnego.

7.1.4 Twierdzenie Parsevala

Rozpatrzmy dwie funkcje $f(t)$ i $g(t)$ o tym samym okresie T spełniające warunki Dirichleta. Przedstawmy je w postaci wykładniczej Fouriera

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{jk\omega t} \quad (7.21)$$

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{jk\omega t} \quad (7.22)$$

w której pulsacja podstawowa ω jest określona poprzez okres funkcji $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Przy takich założeniach twierdzenie Parsevala można sformułować następująco.

Twierdzenie Parsevala

Jeśli funkcje $f(t)$ i $g(t)$ są okresowe o tym samym okresie T i obie spełniają warunki Dirichleta, to wartość średnia z iloczynu tych funkcji za okres określona jest zależnością

$$\overline{f(t)g(t)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)g(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k g_k^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k f_k^* \quad (7.23)$$

w której f_k i g_k oznaczają rozwinięcie wykładnicze funkcji zadanych $f(t)$ i $g(t)$ a znak $*$ oznacza operację sprzężenia liczby zespolonej.

Twierdzenie Parsevala określa wartość średnią za okres iloczynu dwu funkcji okresowych $f(t)$ i $g(t)$ o tym samym okresie. Z twierdzenia wynika, że wartość średnią tworzą jedynie iloczyny składników rozkładu wykładniczego o tym samym rzędzie. Składniki sumy pochodzące od iloczynów składowych różnego rzędu są równe zeru. W szczególnym przypadku gdy $f(t)=g(t)$ wzór Parsevala upraszcza się do postaci

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2 \quad (7.24)$$

gdyż mnożenie liczby zespolonej przez sprzężoną oznacza kwadrat modułu liczby zespolonej, $f_k f_k^* = |f_k|^2$. Ostatni wzór wiąże się bezpośrednio z obliczeniem wartości skutecznej przebiegu niesinusoidalnego, rozwiniętego w szereg Fouriera.

7.2 Wartość skuteczna napięcia i prądu niesinusoidalnego

W przypadku analizy obwodów o przebiegach niesinusoidalnych okresowych sygnał prądu i napięcia w obwodzie przedstawiany jest zwykle w postaci szeregu trygonometrycznego Fouriera

$$u(t) = U_0 + \sum_k U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) \quad (7.25)$$

$$i(t) = I_0 + \sum_k I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k) \quad (7.26)$$

w których U_{km} oraz I_{km} są amplitudami k -tej harmonicznej odpowiednio napięcia $u(t)$ i prądu $i(t)$. Ψ_k jest fazą początkową k -tej harmonicznej a φ_k jest kątem przesunięcia fazowego k -tej harmonicznej prądu względem k -tej harmonicznej napięcia.

Korzystając z twierdzenia Parsevala można udowodnić, że wartość skuteczna przebiegu składającego się z sumy wielu harmoniczných może być obliczona na podstawie wartości skutecznych każdej harmonicznej z osobna. Biorąc pod uwagę zależność (7.24) i uwzględniając relację między wartością maksymalną i skuteczną można pokazać, że wartość skuteczna przebiegu niesinusoidalnego jest pierwiastkiem z sumy kwadratów wartości skutecznych poszczególnych harmoniczných. W przypadku napięcia i prądu opisanych zależnościami (7.25) i (7.26) wzory na moduł wartości skutecznej przyjmują postać

$$|U| = \sqrt{\sum_k |U_k|^2} = \sqrt{|U_0|^2 + |U_1|^2 + |U_2|^2 + \dots} \quad (7.27)$$

$$|I| = \sqrt{\sum_k |I_k|^2} = \sqrt{|I_0|^2 + |I_1|^2 + |I_2|^2 + \dots} \quad (7.28)$$

w której U_k oraz I_k oznaczają wartości skuteczne odpowiednio napięcia i prądu k -tej harmonicznej. Wartość skuteczna (moduł) napięcia i prądu niesinusoidalnego jest równa pierwiastkowi kwadratowemu z sumy kwadratów modułów wartości skutecznych wszystkich harmoniczných oraz składowej stałej.

W przypadku wystąpienia w przebiegu wielu harmoniczných ważnym wskaźnikiem odkształcenia tego przebiegu od sinusoidy jest **współczynnik zawartości harmoniczných h** . Współczynnik ten definiuje się jako stosunek wartości skutecznej przebiegu $f(t)$ po usunięciu z niego składowej stałej i pierwszej harmonicznej do wartości skutecznej przebiegu po usunięciu z niego jedynie składowej stałej. Przy oznaczeniu wartości skutecznych odpowiednich harmoniczných przez F_k wzór na współczynnik zawartości harmoniczných można zapisać w postaci

$$h = \sqrt{\frac{|F_2|^2 + |F_3|^2 + |F_4|^2 + \dots}{|F_1|^2 + |F_2|^2 + |F_3|^2 + \dots}} \quad (7.29)$$

Jeśli badany przebieg zawiera jedynie składową podstawową (pierwszą) to jak łatwo zauważyć współczynnik zawartości harmoniczných jest równy zeru, co oznacza brak odkształcenia krzywej od postaci sinusoidalnej.

7.3. Moc przy przebiegach niesinusoidalnych

Niezależnie od charakteru zmienności w czasie przebiegów prądu i napięcia moc chwilowa w obwodzie jest wyrażona tym samym wzorem $p(t)=u(t)i(t)$. Korzystając z tej zależności oraz uwzględniając twierdzenie Parsevala wyrażającego iloczyn dwu sum harmoniczných można udowodnić, że moc czynna P jako wartość średnia z iloczynu prądu i napięcia w obwodzie

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t)dt \quad (7.30)$$

przy wystąpieniu wielu harmoniczných jest równa sumie mocy czynnych poszczególných harmoniczných, włączając w to składową stałą

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |U_k| |I_k| \cos \varphi_k \quad (7.31)$$

Analogicznie jak dla przebiegów sinusoidalnych również przy przebiegach odkształconých istnieje pojęcie mocy biernej, jako sumy mocy bierných pochodzących od poszczególných harmoniczných, czyli

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} |U_k| |I_k| \sin \varphi_k \quad (7.32)$$

Analogicznie do obwodów z przebiegami sinusoidalnymi również dla przebiegów niesinusoidalnych wprowadza się pojęcie modułu mocy pozornej jako iloczynu wartości skutecznej napięcia odkształconego przez wartość skuteczną prądu odkształconego, czyli

$$|S| = |U||I| = \sqrt{\sum_k |U_k|^2 \cdot \sum_k |I_k|^2} \quad (7.33)$$

Należy zaznaczyć, że tak zdefiniowana wielkość oznacza moduł mocy pozornej a nie moc pozorną zespoloną. Z porównania wzorów (7.31), (7.32) i (7.33) wynika, że w odróżnieniu od przebiegów sinusoidalnych suma kwadratów mocy czynnej i mocy biernej nie jest równa kwadratowi mocy pozornej. Dla zachowania bilansu mocy wprowadza się w związku z tym nowy rodzaj mocy, zwanej mocą odkształcenia lub deformacji. Moc tę oznaczać będziemy literą D . Jej wartość musi być tak dobrana aby wszystkie rodzaje mocy bilansowały się. W związku z powyższym przyjęto następujący związek między poszczególnymi rodzajami mocy

$$|S|^2 = P^2 + Q^2 + D^2 \quad (7.34)$$

Oznacza to, że moc deformacji definiuje równanie

$$D = \sqrt{|S|^2 - Q^2 - P^2} \quad (7.35)$$

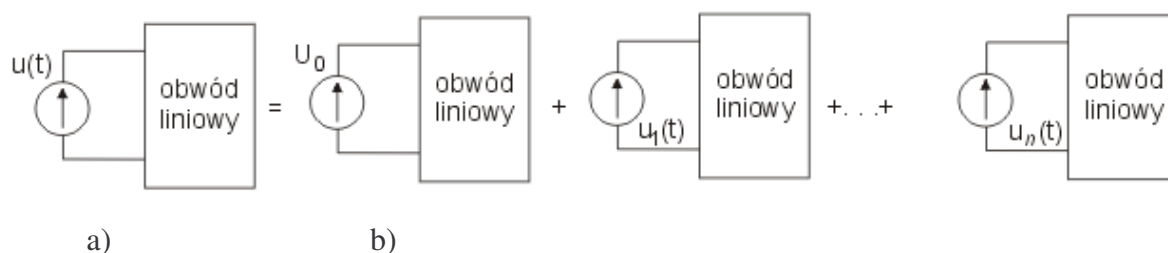
Stosunek mocy czynnej do mocy pozornej nazywamy, przez analogię do przebiegów sinusoidalnych, współczynnikiem mocy i określamy wzorem

$$\cos \nu = \frac{P}{|S|} \quad (7.36)$$

Współczynnik mocy obwodu przy wymuszeniu niesinusoidalnym tylko z definicji przypomina współczynnik mocy obwodu przy wymuszeniu harmonicznym. W rzeczywistości jego interpretacja jest pozbawiona sensu fizycznego jaką posiada $\cos \varphi$.

7.4. Metodyka rozwiązywania obwodów przy wymuszeniu niesinusoidalnym

W przypadku wystąpienia w obwodzie RLC wymuszenia niesinusoidalnego obliczenie odpowiedzi w stanie ustalonym musi uwzględnić fakt istnienia wielu harmoniczných (teoretycznie nieskończenie wielkiej liczby) różniących się częstotliwością. Załóżmy, że do obwodu RLC przyłożono okresowe napięcie niesinusoidalne $u(t)$ jak to przedstawiono na rys. rys. 7.5.



Rys. 7.5. Ilustracja zastosowania zasady superpozycji przy rozwiązywaniu obwodów o wymuszeniu napięciowym niesinusoidalnym: a) obwód o wymuszeniu niesinusoidalnym, b) superpozycja obwodów o wymuszeniu sinusoidalnym

Napięcie to można przedstawić w sposób przybliżony za pomocą skończonej sumy n harmoniczných

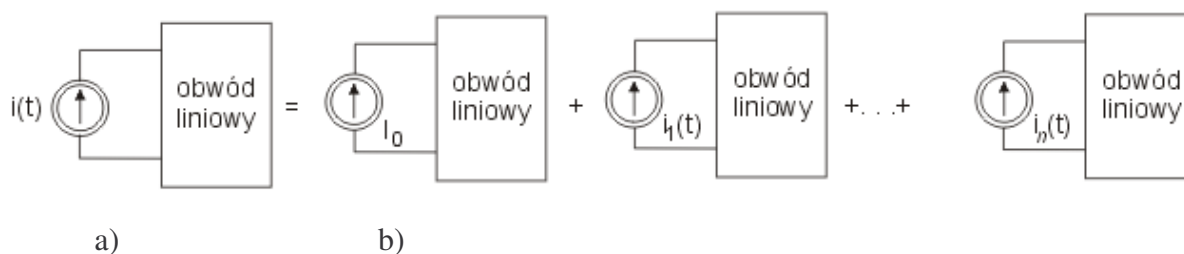
$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^n U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) = U_0 + u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + \dots + u_n(t) \quad (7.37)$$

w której n jest największą wartością harmonicznę uwzględnionej w rozwinięciu Fouriera. Wobec liniowości obwodu można zastosować zasadę superpozycji i obliczyć prądy od poszczególnych źródeł oddzielnie (rys. 7.5b). Przy wymuszeniu typu napięciowego źródła eliminowane z obwodu zwiera się.

W przypadku wystąpienia w obwodzie źródeł wymuszających prądowych

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^n I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) = I_0 + i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \dots + i_n(t) \quad (7.38)$$

postępuje się podobnie, analizując obwód dla każdej harmonicznej oddzielnie (rys. 7.6). Ponieważ źródła harmoniczne typu prądowego są połączone równolegle eliminacja danego źródła polega na rozwarciu jego zacisków.



Rys. 7.6 Ilustracja zastosowania zasady superpozycji przy rozwiązywaniu obwodów o wymuszeniu prądowym niesinusoidalnym: a) obwód o wymuszeniu niesinusoidalnym, b) superpozycja obwodów o wymuszeniu sinusoidalnym

Należy przy tym pamiętać, że każde źródło ma inną częstotliwość, będącą wielokrotnością częstotliwości podstawowej i wynoszącą $\omega_k = k\omega$. Ponieważ zarówno reaktancja pojemnościowa $X_C^{(k)}$ jak i indukcyjna $X_L^{(k)}$ jest funkcją częstotliwości, zatem reaktancje te dla harmonicznej rzędu k wynoszą odpowiednio

$$X_L^{(k)} = k\omega L = kX_L \quad (7.39)$$

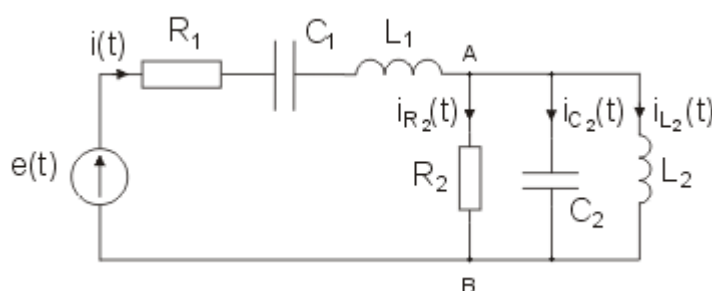
$$X_C^{(k)} = 1/k\omega C = X_C / k \quad (7.40)$$

gdzie $X_L = \omega L$ jest reaktancją indukcyjną dla składowej harmonicznej podstawowej a $X_C = 1/\omega C$ - reaktancją pojemnościową dla harmonicznej podstawowej. Dla każdej harmonicznej wymuszenia należy przeprowadzić oddzielną analizę odpowiedniego obwodu przy zastosowaniu jednej z poznanych wcześniej metod (metoda praw Kirchhoffa, oczkowa, węzłowa, Thevenina itp.). Wynikiem analizy są wartości prądów i napięć poszczególnych gałęzi obwodu oraz odpowiednie moce: czynna i bierna dla każdej harmonicznej. Po wyznaczeniu odpowiedzi dla każdej harmonicznej oddzielnie należy wyznaczyć wypadkowe wartości skuteczne odpowiednich prądów i napięć oraz mocy według wzorów podanych

wcześniej w tej lekcji. Sposób postępowania przy analizie obwodów z przebiegami niesinusoidalnymi zostanie zilustrowany na przykładzie.

Przykład 7.3

Rozważmy schemat obwodu poddanego analizie przedstawiony na rys. 7.7. Przyjmijmy następujące wartości liczbowe parametrów obwodu: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $L_1 = 1H$, $L_2 = 2H$, $C_1 = 1/4F$, $C_2 = 1/2F$. Wymuszenie napięciowe $e(t)$ opisane jest sumą harmonicznym $e(t) = 10 + 20\sqrt{2} \sin(\omega t) + 10\sqrt{2} \sin(2\omega t) V$, przy czym $\omega = 1 \text{ rad/s}$.



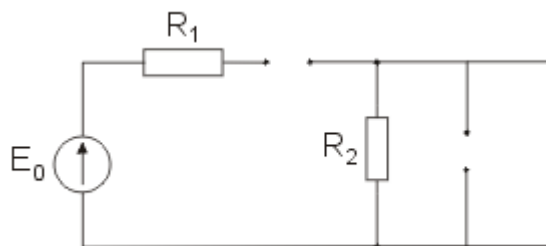
Rys. 7.7. Schemat obwodu do przykładu 7.3

Rozwiązanie

Ze względu na istnienie w wymuszeniu trzech harmonicznym należy dokonać trzech analiz obwodu, za każdym razem zakładając jedno wymuszenie i eliminując pozostałe (wobec wymuszenia napięciowego źródła eliminowane ulegają zwarceniu).

- *Harmoniczna zerowa (składowa stała)*

Harmoniczna zerowa przedstawia sobą wymuszenie stałe (częstotliwość wymuszenia zerowa). Oznacza to, że w tym przypadku impedancje cewek są równe zeru ($Z_L = j\omega L = 0$) a impedancje kondensatorów równe nieskończoności ($Z_C = 1/(j\omega C) = \infty$). Obwód dla harmonicznej zerowej przedstawiony jest na rys. 7.8 (wszystkie cewki zwarte, kondensatory rozwarte).



Rys. 7.8 Postać obwodu dla harmonicznej zerowej (składowej stałej)

Wobec przerwy w obwodzie prąd składowej stałej nie może płynąć, stąd $i^{(0)} = 0$ oraz $S^{(0)} = 0$, $u_{C1}^{(0)} = E_0 = 10$. Pozostałe prądy i napięcia w obwodzie są zerowe. Wszystkie moce obwodu wobec zerowych wartości prądów są także równe zero.

- *Harmoniczna podstawowa*

Schemat obwodu dla harmonicznej podstawowej jest identyczny ze schematem ogólnym przedstawionym na rys. 7.7, z tym, że zamiast napięcia $e(t)$ uwzględniona jest składowa podstawowa $e_1(t) = 20\sqrt{2} \sin(\omega t)$. Przy jednostkowej pulsacji wymuszenia $\omega=1$ reaktancje indukcyjna i pojemnościowa obwodu dla harmonicznej podstawowej są odpowiednio równe:

$$X_{L1}^{(1)} = \omega L_1 = 1$$

$$X_{L2}^{(1)} = \omega L_2 = 2$$

$$X_{C1}^{(1)} = 1 / \omega C_1 = 4$$

$$X_{C2}^{(1)} = 1 / \omega C_2 = 2$$

Impedancja połączenia równoległego elementów jest równa $Z_r = R_2 = 2$ (rezonans równoległy elementów). Kolejne obliczenia można przedstawić w następującej formie:

$$I^{(1)} = \frac{20}{1 + j1 - j4 + 2} = 4,7e^{j45^\circ} = I_{R2}^{(1)}$$

$$U_{AB}^{(1)} = Z_r I^{(1)} = 9,4e^{j45^\circ}$$

$$I_{L2}^{(1)} = \frac{U_{AB}^{(1)}}{jX_{L2}} = 4,7e^{-j45^\circ}$$

$$I_{C2}^{(1)} = \frac{U_{AB}^{(1)}}{-jX_{C2}} = -4,7e^{-j45^\circ}$$

$$S^{(1)} = E_1 I^{(1)*} = 20 \cdot 4,7e^{-j45^\circ} = 66,7 - j66,7$$

- *Harmoniczna druga*

Harmoniczna druga reprezentuje sobą również wymuszenie sinusoidalne o częstotliwości dwukrotnie większej niż częstotliwość podstawowa. Schemat obwodu dla tej harmonicznej jest identyczny ze schematem ogólnym obwodu przedstawionym na rys. 7.7, z tym, że zamiast napięcia $e(t)$ przyłożona jest jego druga składowa $e_2(t) = 10\sqrt{2}\sin(2\omega t)$. Przy pulsacji wymuszenia harmonicznej drugiej $\omega_2 = 2\omega = 2$, reaktancje indukcyjna i pojemnościowa dla harmonicznej drugiej są równe:

$$X_{L1}^{(2)} = \omega_2 L_1 = 2$$

$$X_{L2}^{(2)} = \omega_2 L_2 = 4$$

$$X_{C1}^{(2)} = 1/\omega_2 C_1 = 2$$

$$X_{C2}^{(2)} = 1/\omega_2 C_2 = 1$$

Impedancja połączenia równoległego elementów jest teraz równa $Z_r = \frac{1}{Y_r}$, gdzie

$$Y_r = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{jX_{L2}^{(2)}} + \frac{1}{jX_{C2}^{(2)}} = 0,5 + j0,75.$$

Stąd

$$Z_r = 1,11e^{-j56^\circ}.$$

Kolejność dalszych obliczeń w obwodzie jest następująca:

$$I^{(2)} = \frac{10}{1 + j2 - j2 + 1,11e^{-j56^\circ}} = 5,37e^{j29,6^\circ}$$

$$U_{AB}^{(2)} = Z_r I^{(2)} = 5,97 e^{-j26^\circ}$$

$$I_{L2}^{(2)} = \frac{U_{AB}^{(2)}}{jX_{L2}^{(2)}} = 1,49 e^{-j116^\circ}$$

$$I_{C2}^{(2)} = \frac{U_{AB}^{(2)}}{jX_{C2}^{(2)}} = 5,97 e^{j64^\circ}$$

$$I_{R2}^{(2)} = \frac{U_{AB}^{(2)}}{R_2} = 2,98 e^{-j26^\circ}$$

$$S^{(2)} = E_2 I^{(2)*} = 10 \cdot 5,37 e^{-j29,6^\circ} = 46,7 - j26,5$$

Wartości skuteczne prądów w obwodzie są równe:

$$|I| = \sqrt{4,7^2 + 5,37^2} = 7,13 A,$$

$$|I_{R2}| = \sqrt{4,7^2 + 2,98^2} = 5,57 A$$

$$|I_{L2}| = \sqrt{4,7^2 + 1,49^2} = 4,93 A$$

$$|I_{C2}| = \sqrt{4,7^2 + 5,97^2} = 7,62 A$$

Wartość skuteczna napięcia źródła jest równa

$$|E| = \sqrt{10^2 + 20^2 + 10^2} = 24,5 V$$

Moc pozorna (moduł) wydawana przez źródło jest równa

$$S = |E||I| = 174,65 VA$$

Całkowita moc czynna i bierna wydana przez źródło są równe odpowiednio

$$P = P^{(0)} + P^{(1)} + P^{(2)} = 66,7 + 46,7 = 113,4\text{W}$$

oraz

$$Q = Q^{(1)} + Q^{(2)} = -66,7 - 26,5 = -93,2\text{var}$$

Moc odkształcenia

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = \sqrt{174,65^2 - 113,4^2 - 93,2^2} = 94,64\text{VA}$$

W obwodzie powstała bardzo duża moc odkształcenia. Wytłumaczeniem tego faktu jest występowanie zjawiska rezonansu zarówno dla harmoniczej podstawowej (cewka druga i kondensator drugi) jak i dla harmoniczej drugiej (cewka pierwsza i kondensator pierwszy). Moc bierna wypadkowa w elementach reaktancyjnych w stanie rezonansu jest zerowa co pomniejsza moc bierną całego obwodu dla tych harmoniczych. Z drugiej strony wszystkie harmoniczne tworzą wartości skuteczne zarówno prądu jak i napięcia, stąd ich iloczyn tworzący moduł mocy pozornej przyjmuje dużą wartość. W bilansie mocy wpływa to na znaczne zwiększenie mocy deformacji.

Zadania sprawdzające

Zadanie 7.1

Przedstawić funkcję

$$f(t) = 10 + 20\sin(\omega t) + 16\cos(5\omega t) + 8\cos(7\omega t)$$

w postaci wykładniczej szeregu Fouriera.

Rozwiązanie

Z definicji funkcji sinus i cosinus wynika następująca zależność

$$f(t) = 10 + 20 \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} + 16 \frac{e^{j5\omega t} + e^{-j5\omega t}}{2} + 8 \frac{e^{j7\omega t} + e^{-j7\omega t}}{2}$$

Stąd postać wykładnicza szeregu Fouriera dana jest zależnością

$$f(t) = 4e^{-j7\omega t} + 8e^{-j5\omega t} + 10e^{j90^\circ} e^{-j\omega t} + 10 + 10e^{-j90^\circ} e^{j\omega t} + 8e^{j5\omega t} + 4e^{j7\omega t}$$

Zadanie 7.2

Zapisać twierdzenie Parsevala dla dwu przebiegów czasowych danych w następującej postaci

$$f(t) = 5 + 10\sin(\omega t) + 16\cos(2\omega t) + 12\cos(3\omega t)$$

$$g(t) = 2 + 8\sin(\omega t) + 10\cos(2\omega t) + 12\cos(5\omega t)$$

Rozwiązanie

Z definicji funkcji sinus i cosinus otrzymuje się następujące postaci wykładnicze szeregu Fouriera dla obu funkcji

$$f(t) = 5 + 10 \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} + 16 \frac{e^{j2\omega t} + e^{-j2\omega t}}{2} + 12 \frac{e^{j3\omega t} + e^{-j3\omega t}}{2}$$

$$f(t) = 6e^{-j3\omega t} + 8e^{-j2\omega t} + 5e^{j90^\circ} e^{-j\omega t} + 5 + 5e^{-j90^\circ} e^{j\omega t} + 8e^{j2\omega t} + 6e^{j3\omega t}$$

$$g(t) = 2 + 8 \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} + 10 \frac{e^{j2\omega t} + e^{-j2\omega t}}{2} + 12 \frac{e^{j5\omega t} + e^{-j5\omega t}}{2}$$

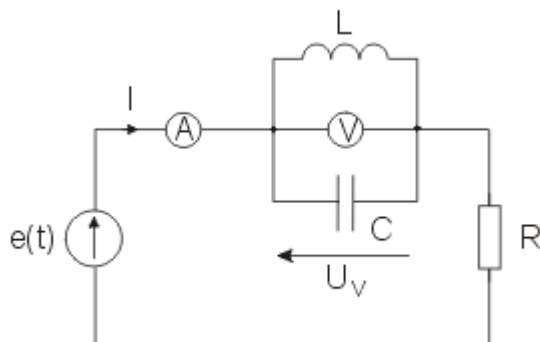
$$g(t) = 6e^{-j5\omega t} + 5e^{-j2\omega t} + 4e^{j90^\circ} e^{-j\omega t} + 2 + 4e^{-j90^\circ} e^{j\omega t} + 5e^{j2\omega t} + 6e^{j5\omega t}$$

Działania określone twierdzeniem Parsevala przyjmą więc postać

$$\overline{f(t)g(t)} = 5 \cdot 2 + 5e^{j90^\circ} \cdot 4e^{-j90^\circ} + 8 \cdot 5 + 6 \cdot 0 + 0 \cdot 6 + 5e^{-j90^\circ} \cdot 4e^{j90^\circ} + 8 \cdot 5 + 6 \cdot 0 + 0 \cdot 6 = 130$$

Zadanie 7.3

Wyznaczyć wskazania przyrządów pomiarowych w obwodzie z rys. 7.9.



Rys. 7.9 Schemat obwodu do zadania 7.3

Przyjąć następującą postać wymuszenia $e(t) = 10 + 20\sqrt{2} \sin(t) + 15\sqrt{2} \sin(2t)$. Wartości parametrów obwodu są następujące: $R=2\Omega$, $L=0,5\text{H}$, $C=0,5\text{F}$.

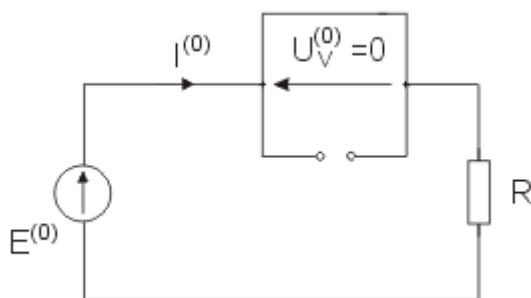
Uwaga: Woltomierze i amperomierze włączone w obwodzie mierzą moduły wartości skutecznych odpowiednio napięcia i prądu.

Rozwiązanie

Ponieważ wymuszenie zawiera trzy harmoniczne, należy rozwiązać obwód trzy razy dla każdego wymuszenia oddzielnie.

- *Harmoniczna zerowa (składowa stała)*

Obwód dla składowej stałej $E^{(0)} = 10$ przedstawiony jest na rys. 7.10 (cewka zwarta, kondensator przerwą)



Rys. 7.10. Obwód dla harmonicznej zerowej

$$I^{(0)} = \frac{E^{(0)}}{R} = 5$$

$$U_V^{(0)} = 0$$

- *Harmoniczna podstawowa ($\omega = 1$)*

Kolejność obliczeń jest następująca:

$$E^{(1)} = 20$$

$$Z_L^{(1)} = j\omega L = j0,5$$

$$Z_C^{(1)} = -j/\omega C = -j2$$

$$Z_{LC}^{(1)} = \frac{j0,5(-j2)}{-j1,5} = j0,667$$

$$I^{(1)} = \frac{E^{(1)}}{Z_{LC}^{(1)} + R} = 9 - j3$$

$$U_V^{(1)} = Z_{LC}^{(1)} I^{(1)} = 2 + j6$$

- *Harmoniczna druga ($\omega = 2$)*

Kolejność obliczeń jest następująca:

$$E^{(2)} = 15$$

$$Z_L^{(2)} = j\omega L = j1$$

$$Z_C^{(2)} = -j/\omega C = -j1$$

$$Z_{LC}^{(2)} = \infty$$

$$I^{(2)} = 0$$

$$U_V^{(2)} = 15$$

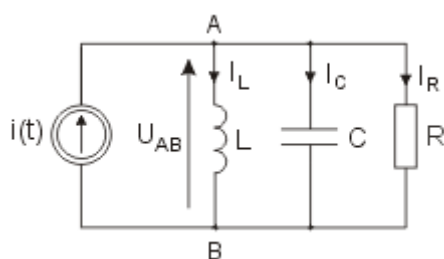
Wskazania amperomierza i woltomierza (moduły odpowiednich wielkości) są równe:

$$|I| = \sqrt{|I^{(0)}|^2 + |I^{(1)}|^2 + |I^{(2)}|^2} = 10.72 \text{ A}$$

$$|U_V| = \sqrt{|U_V^{(0)}|^2 + |U_V^{(1)}|^2 + |U_V^{(2)}|^2} = 16,28 \text{ V}$$

Zadanie 7.4

Wyznaczyć moce: czynną, bierną, pozorną i odkształcenia w obwodzie przedstawionym na rys. 7.11.



Rys. 7.11 Schemat obwodu do zadania 7.4

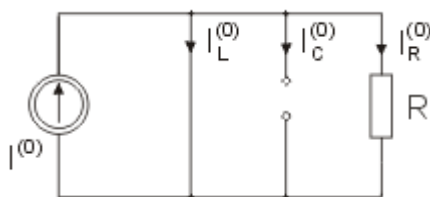
W obwodzie występuje wymuszenie prądowe $i(t)$ dane w następującej postaci $i(t) = 5 + 2\sqrt{2} \sin(t) + \sqrt{2} \sin(3t)$. Przyjąć wartości parametrów: $R=5\Omega$, $L=1\text{H}$, $C=1/9\text{F}$.

Rozwiązanie

Ze względu na występowanie w wymuszeniu trzech harmoniczych należy zastosować superpozycję źródeł. Zgodnie z tą metodą obliczamy kolejno.

- *Harmoniczna zerowa (składowa stała)*

Obwód dla harmoniczej zerowej przedstawiony jest na rysunku 7.12 (cewka zwarta, kondensator przerwa).



Rys. 7.12 Schemat obwodu dla harmoniczej zerowej

$$I^{(0)} = 5$$

$$I_L^{(0)} = I^{(0)} = 5$$

$$I_R^{(0)} = I_C^{(0)} = 0$$

$$U_{AB}^{(0)} = 0$$

$$S^{(0)} = U_{AB}^{(0)} I^{(0)} = 0$$

- *Harmoniczna podstawowa ($\omega = 1$)*

Kolejność obliczeń jest następująca:

$$I^{(1)} = 2$$

$$Z_L^{(1)} = j\omega L = j1$$

$$Z_C^{(1)} = -j/\omega C = -j9$$

$$Y_{RLC}^{(1)} = \frac{1}{5} + \frac{1}{j1} + \frac{1}{-j9} = 0,2 - j0,89$$

$$U_{AB}^{(1)} = \frac{I^{(1)}}{Y_{RLC}^{(1)}} = 0,48 + j2,14$$

$$I_L^{(1)} = \frac{U_{AB}^{(1)}}{Z_L^{(1)}} = 2,14 - j0,48$$

$$I_C^{(1)} = \frac{U_{AB}^{(1)}}{Z_C^{(1)}} = -0,24 + j0,053$$

$$I_R^{(1)} = \frac{U_{AB}^{(1)}}{R} = 0,096 + j0,43$$

$$S^{(1)} = U_{AB}^{(1)} I^{(1)*} = 0,96 + j4,28$$

- *Harmoniczna trzecia ($\omega = 3$)*

Kolejność obliczeń jest następująca:

$$I^{(3)} = 1$$

$$Z_L^{(3)} = j\omega L = j3$$

$$Z_C^{(3)} = -j/\omega C = -j3$$

$$Z_{RLC}^{(3)} = R = 5 \text{ (rezonans prądów)}$$

$$U_{AB}^{(3)} = RI^{(3)} = 5$$

$$I_L^{(3)} = \frac{U_{AB}^{(3)}}{Z_L^{(3)}} = -j5/3$$

$$I_C^{(3)} = \frac{U_{AB}^{(3)}}{Z_C^{(3)}} = j5/3$$

$$I_R^{(3)} = \frac{U_{AB}^{(3)}}{R} = 1$$

$$S^{(3)} = U_{AB}^{(3)} I^{(3)*} = 15 + j0$$

Wartości skuteczne prądów i napięć są następujące:

$$|I| = \sqrt{|I^{(0)}|^2 + |I^{(1)}|^2 + |I^{(3)}|^2} = 5,48 \text{ A}$$

$$|I_R| = \sqrt{|I_R^{(0)}|^2 + |I_R^{(1)}|^2 + |I_R^{(3)}|^2} = 1,09 \text{ A}$$

$$|I_L| = \sqrt{|I_L^{(0)}|^2 + |I_L^{(1)}|^2 + |I_L^{(3)}|^2} = 5,70 \text{ A}$$

$$|I_C| = \sqrt{|I_C^{(0)}|^2 + |I_C^{(1)}|^2 + |I_C^{(3)}|^2} = 1,68 \text{ A}$$

$$|U_{AB}| = \sqrt{|U_{AB}^{(0)}|^2 + |U_{AB}^{(1)}|^2 + |U_{AB}^{(3)}|^2} = 5,46 \text{ V}$$

Moce w wydzielone przez źródło w obwodzie:

$$|S| = |U_{AB}| |I| = 29,90 \text{ VA}$$

$$P = P^{(0)} + P^{(1)} + P^{(3)} = 15,96 \text{ W}$$

$$Q = Q^{(0)} + Q^{(1)} + Q^{(3)} = 4,28 \text{ var}$$

$$D = \sqrt{|S|^2 - P^2 - Q^2} = 24,92 \text{ VA}$$

Lekcja 8. Układy trójfazowe

Wstęp

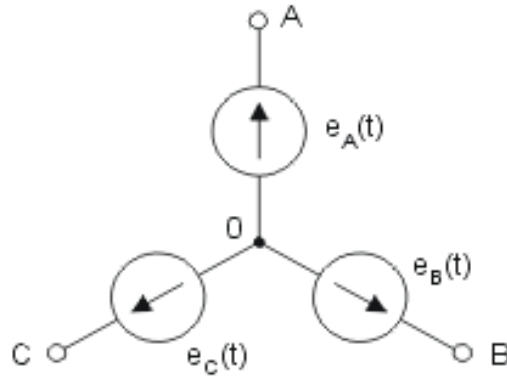
Do najważniejszych, z punktu widzenia praktycznego, należą układy trójfazowe, zawierające generator złożony z trzech źródeł sinusoidalnych o tej samej częstotliwości i przesuniętych w fazie oraz odbiornik trójfazowy składający się z trzech impedancji połączonych bądź w trójkąt bądź w gwiazdę. Układy takie są powszechnie stosowane w technice i z tego powodu analiza zjawisk w takich układach jest szczególnie ważna.

Lekcja ósma poświęcona jest teorii obwodów trójfazowych. Wprowadzone zostaną podstawowe pojęcia, takie jak generator trójfazowy, odbiornik trójfazowy, wykresy wektorowe prądów i napięć trójfazowych a także relacje między prądami i mocami przy połączeniu odbiornika w gwiazdę i trójkąt. Rozważone zostaną układy pomiarowe mocy w obwodach trójfazowych trójprzewodowych i czteroprzewodowych. Pokażemy, że w trójfazowym układzie cewek rozmieszczonych przestrzennie możliwe jest uzyskanie wektora natężenia pola magnetycznego o niezmienniej amplitudzie, wirującego ze stałą prędkością kątową, zdolnego do wykonania pracy. Zjawisko to jest podstawą budowanych współcześnie maszyn elektrycznych trójfazowych.

8.1. Pojęcia wstępne

8.1.1. Definicja układu trójfazowego

Układem trójfazowym nazywamy układ trzech obwodów elektrycznych, w których istnieją trzy źródła napięć sinusoidalnych o jednakowej częstotliwości, przesunięte względem siebie o określony kąt fazowy i wytworzone w jednym generatorze zwanym generatorem trójfazowym. Poszczególne obwody generatora trójfazowego nazywać będziemy **fazami** i oznaczać literami A, B, C lub kolejnymi cyframi 1, 2, 3. Przykład połączenia 3 faz generatora w jeden układ gwiazdowy przedstawiony jest na rys. 8.1.



Rys. 8.1. Układ faz generatora trójfazowego połączony w gwiazdę

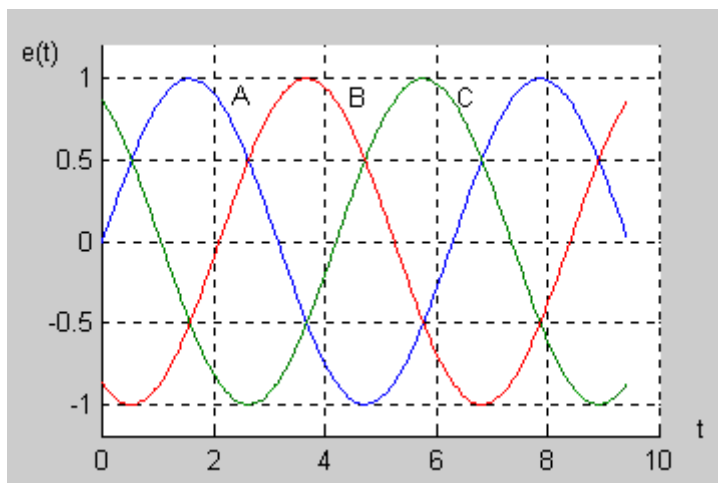
Punkt wspólny wszystkich trzech faz generatora oznaczony jest cyfrą 0. Poszczególnym napięciom fazowym przypisuje się wskaźniki A, B, C lub w przypadku oznaczenia liczbowego cyfry 1, 2, 3. Układ napięć źródłowych generatora trójfazowego nazywać będziemy **symetrycznym**, jeśli napięcia kolejnych faz są przesunięte względem siebie o kąt 120° $\left(\frac{2}{3}\pi\right)$ a amplitudy ich są sobie równe. Wartości chwilowe poszczególnych **napięć fazowych** układu symetrycznego można zapisać w postaci

$$e_A(t) = |E_m| \sin(\omega t + \Psi) \quad (8.1)$$

$$e_B(t) = |E_m| \sin(\omega t + \Psi - 120^\circ) \quad (8.2)$$

$$e_C(t) = |E_m| \sin(\omega t + \Psi + 120^\circ) \quad (8.3)$$

w której E_m oznacza amplitudę, ω pulsację wspólną dla wszystkich faz (przy generacji napięć trójfazowych w jednym generatorze jest to zapewnione automatycznie) a kąt Ψ jest początkowym kątem fazowym napięcia w fazie A. W normalnym systemie trójfazowym przyjmuje się tzw. **kolejność wirowania zgodną**, w której faza B opóźnia się względem fazy A o kąt 120° a faza C (opóźniona względem fazy B o kolejny kąt 120°) wyprzedza fazę A o kąt równy 120° .



Rys. 8.2. Przebiegi czasowe napięć trójfazowych



Na rys. 8.2 przedstawiono przebiegi czasowe napięć trójfazowych przy kącie początkowym Ψ równym zero. Napięcia są zmienne sinusoidalnie przy czym występują regularne przesunięcia o kąt 120° między poszczególnymi sinusoidami.

8.1.2. Układ napięć fazowych

Wobec sinusoidalnej postaci wymuszeń w analizie układów trójfazowych zastosujemy metodę symboliczną. Zgodnie z tą metodą napięcia sinusoidalne zastępuje się ich postacią zespoloną, która dla przyjętych funkcji sinusoidalnych może być zapisana następująco

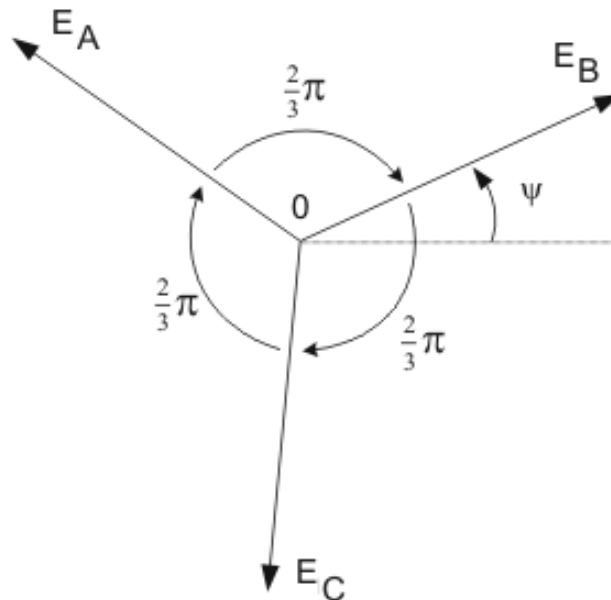
$$E_A = \frac{|E_m|}{\sqrt{2}} e^{j\Psi} \quad (8.4)$$

$$E_B = \frac{|E_m|}{\sqrt{2}} e^{j(\Psi - 120^\circ)} = E_A e^{-j120^\circ} \quad (8.5)$$

$$E_C = \frac{|E_m|}{\sqrt{2}} e^{j(\Psi + 120^\circ)} = E_A e^{j120^\circ} \quad (8.6)$$

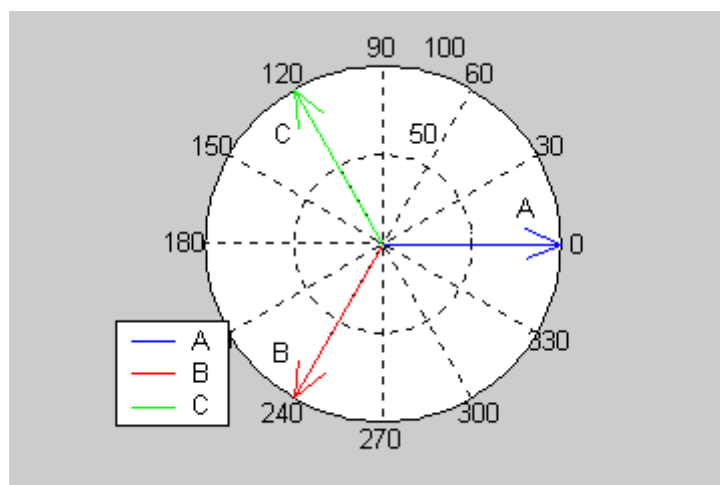
W praktyce wobec nieustannej zmiany wartości napięć w czasie faza początkowa Ψ może być przyjęta dowolnie. Najczęściej dla wygody zakładamy, że jest równa zero. Wykres

wektorowy napięć trójfazowych opisanych zależnościami (8.4) - (8.6) dla kąta fazowego $\Psi \neq 0$ przedstawiony jest na rys. 8.3.

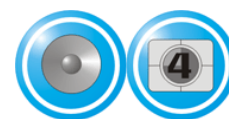


Rys. 8.3. Wykres wektorowy napięć trójfazowych generatora

Punkt wspólny napięć, odpowiadający wspólnemu punktowi połączenia faz generatora oznaczony jest cyfrą 0. Na końcach napięć fazowych zaznaczone są oznaczenia faz (A, B, C). Napięcie fazowe generatora to napięcie między punktem końcowym wektora a punktem zerowym. Wirowanie faz (zmiana pozycji wektora w czasie) w generatorze trójfazowym odbywa się w przyjętym układzie współrzędnych przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.



Rys. 8.4. Wektory napięć trójfazowych wirujące w czasie



Rys. 8.4 pokazuje wektory napięć generatora trójfazowego wirujące w czasie. Wektory fazy B i C nadążają za wektorem A, przy czym przesunięcia fazowe między nimi są stałe i równe dokładnie 120° . Ważną cechą trójfazowego generatora symetrycznego jest zerowanie się sumy napięć fazowych

$$E_A + E_B + E_C = 0 \quad (8.7)$$

Wartość zerowa sumy wynika bezpośrednio z symetrii poszczególnych napięć. Mianowicie

$$E_A + E_B + E_C = E_A + E_A e^{-j120^\circ} + E_A e^{j120^\circ} = E_A \left(1 - 0,5 - j\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,5 + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0$$

8.1.3. Układ napięć międzyfazowych

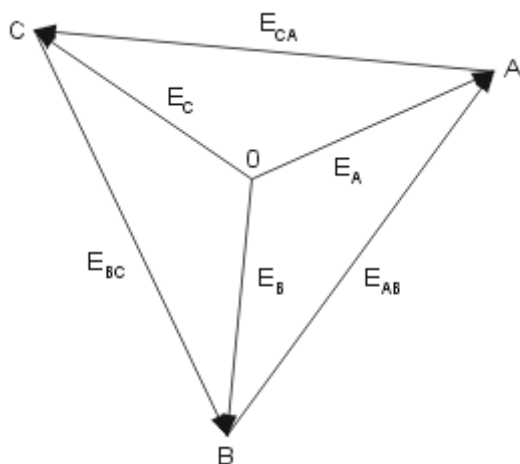
Oprócz napięć fazowych wyróżnia się układ **napięć międzyfazowych**, zwanych również liniowymi, czyli napięć panujących między punktami zewnętrznymi poszczególnych faz. Przy trzech napięciach fazowych można wyróżnić trzy napięcia międzyfazowe: E_{AB} , E_{BC} oraz E_{CA} , przy czym

$$E_{AB} = E_A - E_B \quad (8.8)$$

$$E_{BC} = E_B - E_C \quad (8.9)$$

$$E_{CA} = E_C - E_A \quad (8.10)$$

Z definicji napięć międzyfazowych wynika, że niezależnie od symetrii ich suma jest zawsze równa zeru gdyż wszystkie napięcia tworzą trójkąt zamknięty. Rys. 8.5 pokazuje układ napięć międzyfazowych generatora trójfazowego z przyjętymi oznaczeniami. Symbol E_{AB} oznacza, że strzałka wektora napięcia na wykresie jest skierowana w stronę pierwszego wskaźnika w oznaczeniu (u nas litera A).



Rys. 8.5. Układ napięć międzyfazowych na tle napięć fazowych



Z symetrii napięć fazowych wynika bezpośrednio symetria napięć międzyfazowych. Napięcia te są równe i przesunięte względem siebie o kąt 120° , czyli

$$E_{AB} = E_A - E_B$$

$$E_{BC} = E_{AB} e^{-j120^\circ}$$

$$E_{CA} = E_{AB} e^{j120^\circ}$$

Układ napięć międzyfazowych symetrycznych tworzy więc trójkąt równoboczny. Wykorzystując relacje obowiązujące dla tego trójkąta łatwo jest udowodnić, że napięcie międzyfazowe jest $\sqrt{3}$ razy większe niż napięcie fazowe, co zapiszemy w ogólności jako

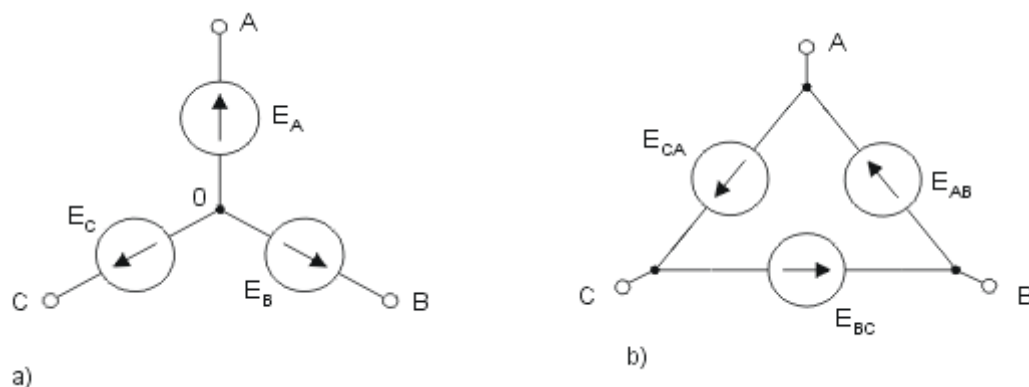
$$|E_{mf}| = \sqrt{3} |E_f| \quad (8.11)$$

gdzie $|E_f|$ oznacza moduł napięcia fazowego a $|E_{mf}|$ moduł napięcia międzyfazowego.

8.2. Analiza układów trójfazowych

8.2.1. Połączenia trójfazowe generatora i odbiornika

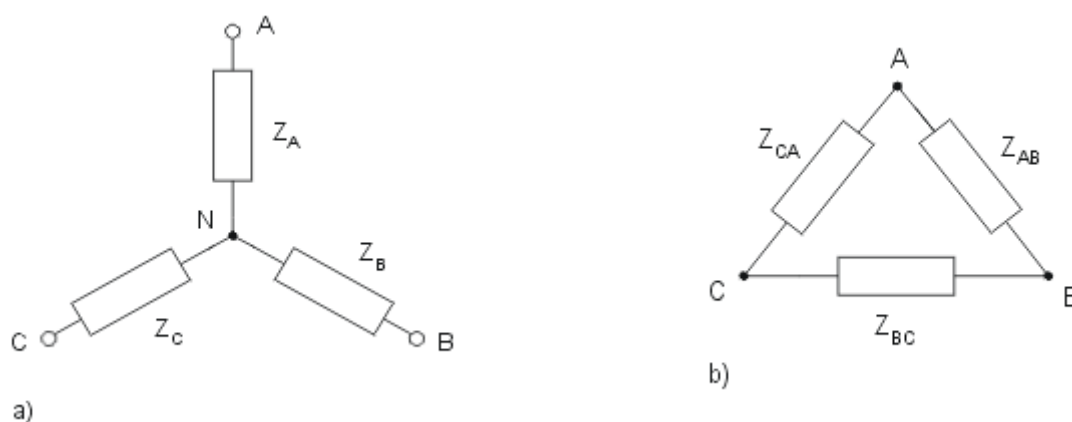
Układ napięć fazowych generatora może być połączony bądź w gwiazdę bądź w trójkąt. Schemat obu połączeń przedstawiony jest na rys. 8. 6



Rys. 8.6. Połączenia faz generatora trójfazowego w a) gwiazdę, b) trójkąt

Przy połączeniu trójkątnym generatora odbiornik jest zasilany napięciem międzyfazowym trójprzewodowym. Przy połączeniu generatora w gwiazdę napięcie zasilające jest napięciem fazowym a liczba przewodów może być równa trzy bądź cztery (przy czterech przewodach zasilających jednym z nich jest przewód zerowy, zwany również przewodem neutralnym).

W układzie trójfazowym odbiornik zawiera również trzy fazy, przy czym może być on połączony w gwiazdę lub w trójkąt. Oba sposoby połączenia odbiornika przedstawione są na rys. 8.7.



Rys. 8.7. Odbiornik trójfazowy połączony w a) gwiazdę, b) trójkąt

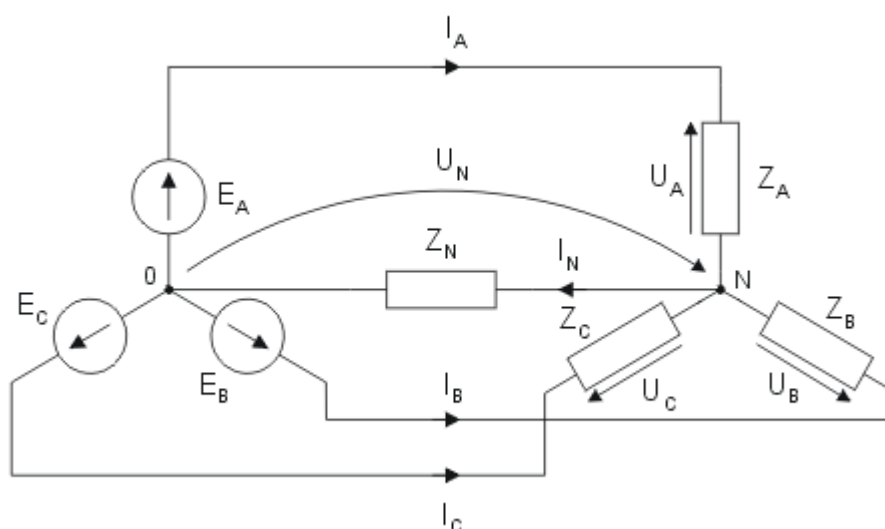
W zależności od sposobu połączenia generatora i odbiornika można w układach trójfazowych wyróżnić cztery rodzaje połączeń. Są to:

- generator i odbiornik połączone w gwiazdę (układ gwiazdowy)
- generator i odbiornik połączone w trójkąt (układ trójkątny)
- generator połączony w gwiazdę a odbiornik w trójkąt
- generator połączony w trójkąt a odbiornik w gwiazdę.

Z punktu widzenia metodyki analizy obwodów istotne są tylko dwa pierwsze rodzaje połączeń. Dwa pozostałe są wtórne względem pierwszych i nie wnoszą nowych elementów do metody analizy.

8.2.2. Układ gwiazdowy faz generatora i odbiornika

Rozpatrzmy układ połączeń gwiazdowych odbiornika i generatora (gwiazda-gwiazda) z oznaczeniami prądów i napięć przedstawionymi na rys. 8.8.



Rys. 8.8. Układ trójfazowy gwiazdowy

Punkt 0 oznacza punkt wspólny faz generatora. Punkt N jest punktem wspólnym impedancji fazowych odbiornika. Zakładamy symetrię napięć fazowych generatora i dowolne wartości impedancji odbiornika. Przyjmijmy do analizy układ czteroprzewodowy z impedancją przewodu zerowego równa Z_N . Wartość impedancji Z_N może być dowolna, w szczególności zerowa (bezpośrednie zwarcie punktów wspólnych generatora i odbiornika) lub nieskończona

(układ trójprzewodowy bez przewodu zerowego). Napięcie między punktem zerowym odbiornika i generatora oznaczmy przez U_N i nazywać będziemy **napięciem niezerównoważenia**.

Układ napięć trójfazowych odbiornika tworzą napięcia na poszczególnych jego fazach, czyli U_A, U_B, U_C . W efekcie w obwodzie trójfazowym o połączeniu gwiazda-gwiazda wyróżnia się dwa układy napięć trójfazowych gwiazdowych: generatora E_A, E_B, E_C i odbiornika U_A, U_B, U_C .

Dla obliczenia prądów w obwodzie należy wyznaczyć układ napięć odbiornikowych. Najlepiej dokonać tego wyznaczając napięcie U_N . Zastosujemy metodę potencjałów węzłowych przy założeniu, że punkt 0 jest węzłem odniesienia a poszukiwany potencjał węzłowy jest równy U_N . Zgodnie z metodą potencjałów węzłowych otrzymuje się

$$E_A Y_A + E_B Y_B + E_C Y_C = U_N (Y_A + Y_B + Y_C + Y_N) \quad (8.12)$$

Stąd

$$U_N = \frac{E_A Y_A + E_B Y_B + E_C Y_C}{(Y_A + Y_B + Y_C + Y_N)} \quad (8.13)$$

gdzie wielkości oznaczone symbolem Y są admitancjami: $Y_A = \frac{1}{Z_A}$, $Y_B = \frac{1}{Z_B}$, $Y_C = \frac{1}{Z_C}$ oraz

$Y_N = \frac{1}{Z_N}$. Wyznaczenie wartości napięcia U_N pozwala obliczyć wartości napięć odbiornikowych. Z prawa napięciowego Kirchhoffa napisanego dla trzech oczek w obwodzie wynika

$$U_A = E_A - U_N \quad (8.14)$$

$$U_B = E_B - U_N \quad (8.15)$$

$$U_C = E_C - U_N \quad (8.16)$$

Przy znanych wartościach admitancji odbiornika obliczenie prądu polega na zastosowaniu prawa Ohma. Mianowicie

$$I_A = Y_A U_A \quad (8.17)$$

$$I_B = Y_B U_B \quad (8.18)$$

$$I_C = Y_C U_C \quad (8.19)$$

$$I_N = Y_N U_N \quad (8.20)$$

Suma prądów w węźle N jest równa zero, zatem $I_A + I_B + I_C = I_N$. Moce wydzielone w odbiorniku trójfazowym oblicza się jako sumę mocy wydzielonych w poszczególnych fazach odbiornika, czyli

$$S_A = P_A + jQ_A = U_A I_A^* \quad (8.21)$$

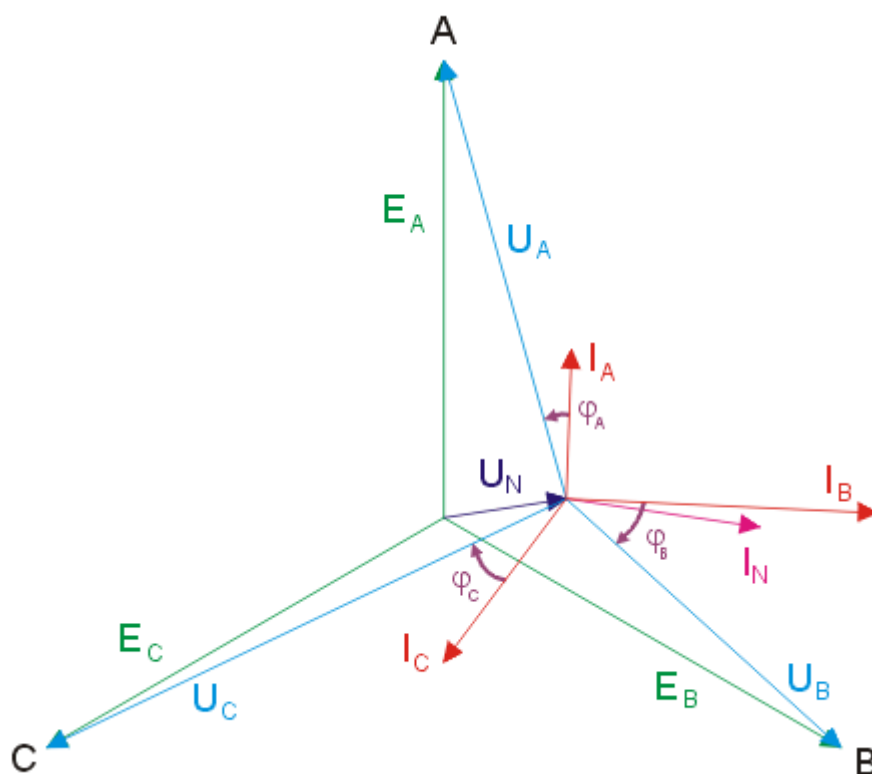
$$S_B = P_B + jQ_B = U_B I_B^* \quad (8.22)$$

$$S_C = P_C + jQ_C = U_C I_C^* \quad (8.23)$$

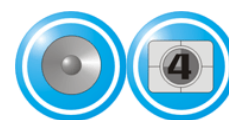
Moc wydzielona na impedancji przewodu zerowego oznacza moc strat. Jest ona równa

$$S_N = P_N + jQ_N = U_N I_N^* \quad (8.24)$$

Otrzymane wyniki można zinterpretować na wykresie wektorowym prądów i napięć w obwodzie. Rys. 8.9 przedstawia przypadek **obciążenia niesymetrycznego**.



Rys. 8.9. Wykres wektorowy prądów i napięć obwodu trójfazowego przy obciążeniu niesymetrycznym



Widoczne są dwie gwiazdy napięć fazowych: generatora o środku w punkcie O i odbiornika o środku w punkcie N . Dla obu gwiazd obowiązuje jeden trójkąt napięć międzyfazowych. Przesunięcie potencjału punktu N względem O (napięcie U_N różne od zera) jest spowodowane niesymetrią odbiornika. Napięcie U_N jest nazywane również **napięciem niezrównoważenia**.

W pracy układu trójfazowego gwiazdowego można wyróżnić kilka szczególnych przypadków:

- **odbiornik symetryczny** z dowolną wartością impedancji przewodu zerowego
- odbiornik niesymetryczny przy zwartym przewodzie zerowym
- zwarcie fazy odbiornika przy przerwie w przewodzie zerowym.

Odbiornik symetryczny

W przypadku symetrii obciążenia impedancje wszystkich faz odbiornika są równe sobie

$$Z_A = Z_B = Z_C = Z \quad (8.25)$$

Podstawiając te wartości do wzoru na napięcie U_N otrzymuje się

$$U_N = \frac{Y(E_A + E_B + E_C)}{3Y + Y_N} = 0 \quad (8.26)$$

gdzie admitancja $Y=1/Z$. Ze względu na symetrię napięć generatora suma jego napięć fazowych jest równa zero (wzór (8.7)), stąd napięcie niezrównoważenia U_N w przypadku symetrii jest zerowe. Oznacza to, że gwiazdy napięć odbiornikowych i generatorowych pokrywają się ze sobą. Prądy fazowe w tym przypadku wyznacza się więc szczególnie prosto na podstawie układu napięć generatora, bez potrzeby obliczania napięcia niezrównoważenia U_N .

$$I_A = YE_A \quad (8.27)$$

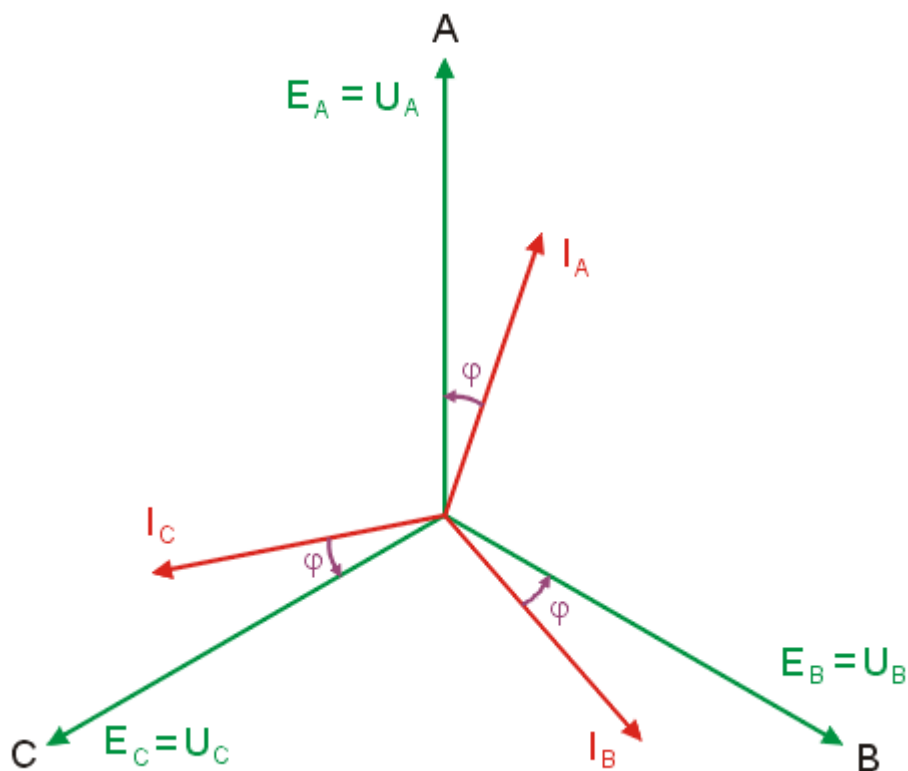
$$I_B = YE_B \quad (8.28)$$

$$I_C = YE_C \quad (8.29)$$

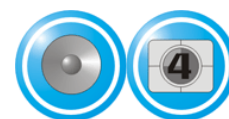
Wobec równych wartości admitancji poszczególnych faz, suma prądów fazowych

$$I_N = Y(E_A + E_B + E_C) = 0 \quad (8.30)$$

jest zerowa, ze względu na zerowanie się sumy napięć fazowych generatora. Prąd w przewodzie zerowym nie płynie, niezależnie od wartości impedancji Z_N tego przewodu. Na rys. 8.10 przedstawiono wykres wektorowy prądów i napięć w układzie trójfazowym symetrycznym. Wszystkie prądy i napięcia tworzą układ symetryczny o jednakowych amplitudach i jednakowych przesunięciach poszczególnych wektorów względem siebie.



Rys. 8.10. Wykres wektorowy prądów i napięć w układzie trójfazowym symetrycznym



Odbiornik symetryczny jest jednym z częściej występujących przypadków w praktyce. Przykładami takich odbiorników są: silniki elektryczne trójfazowe czy piece grzejne trójfazowe (zwykle o dużej mocy).

- *Odbiornik niesymetryczny przy zwartym przewodzie zerowym*

Znaczne uproszczenia występują w analizie jeśli punkt 0 i N układu trójfazowego są połączone bezimpedancyjnie ($Z_N=0$). W takim przypadku napięcie niezrównoważenia $U_N=0$ niezależnie od symetrii impedancji odbiornika. Prądy fazowe są wówczas określane bezpośrednio na podstawie układu napięć generatorowych

$$I_A = Y_A E_A \quad (8.31)$$

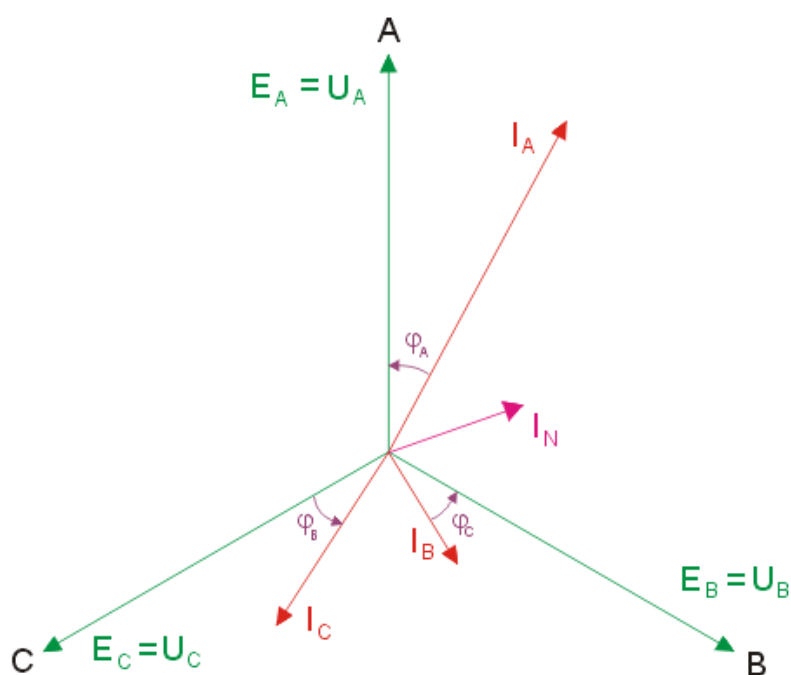
$$I_B = Y_B E_B \quad (8.32)$$

$$I_C = Y_C E_C \quad (8.33)$$

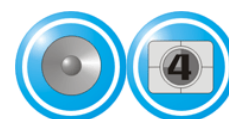
Suma tych prądów w ogólnym przypadku odbiornika niesymetrycznego jest różna od zera

$$I_N = I_A + I_B + I_C \quad (8.34)$$

Wykres wektorowy prądów i napięć w układzie trójfazowym niesymetrycznym przy zwarcii bezimpedancyjnym punktów wspólnych odbiornika i generatora przedstawiony jest na rys. 8.11.

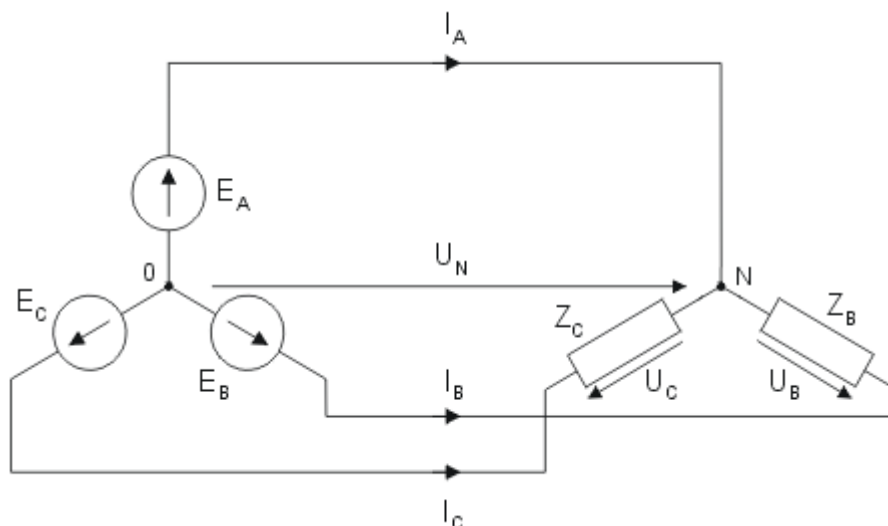


Rys. 8.11. Wykres wektorowy prądów i napięć w układzie trójfazowym przy $Z_N=0$



- *Zwarcie fazy odbiornika przy przerwie w przewodzie zerowym*

Interesujący przypadek połączenia trójprzewodowego między odbiornikiem i generatorem układu trójfazowego powstaje w stanie awaryjnym odbiornika przy zwarcii jednej z faz. Rys. 8.12 przedstawia postać obwodu trójfazowego w rozważanym przypadku przy zwarcii fazy A odbiornika ($Z_A=0$).



Rys. 8.12. Przypadek zwarcia jednej fazy odbiornika trójfazowego

Jak widać z rysunku napięcie U_N równa się napięciu fazowemu generatora w fazie zwartej. Dla schematu z rysunku mamy

$$U_N = E_A \quad (8.35)$$

Ten sam wynik można otrzymać również ze wzoru ogólnego (8.13) po podstawieniu

$Y_A = \frac{1}{Z_A} = \infty$. Odpowiednie prądy fazowe odbiornika w rozważanym przypadku są określone

wzorami

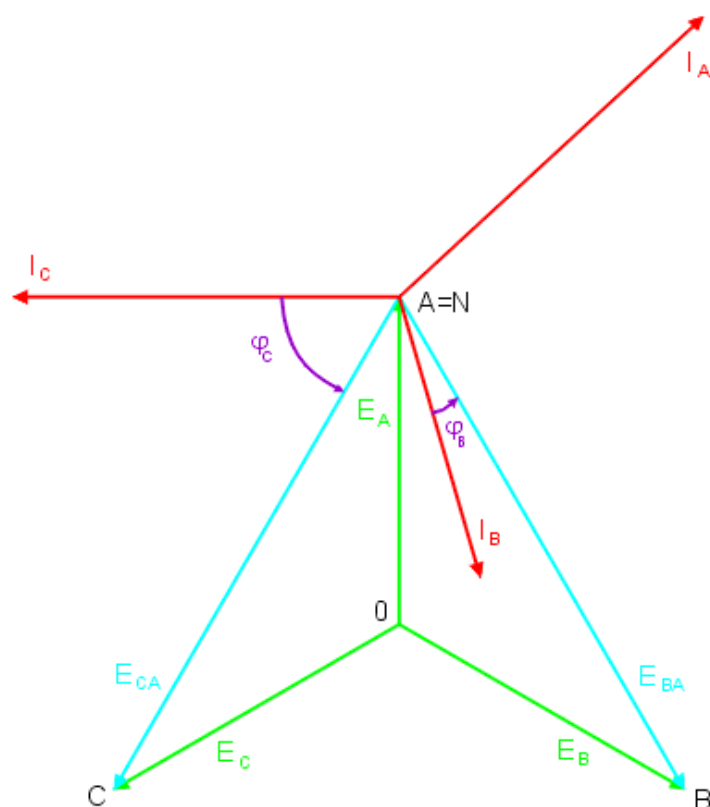
$$I_B = Y_B(E_B - E_A) \quad (8.36)$$

$$I_C = Y_C(E_C - E_A) \quad (8.37)$$

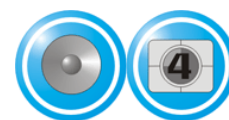
Prąd fazy A nie może być określony z prawa Ohma, gdyż zarówno napięcie na fazie odbiornika jak i jego impedancja są równe zero. Prąd ten może być określony jedynie z prawa prądowego Kirchhoffa, zgodnie z którym

$$I_A = -I_B - I_C \quad (8.38)$$

Wykres wektorowy prądów i napięć w układzie trójfazowym dla tego przypadku przedstawiony jest na rys. 8.13.

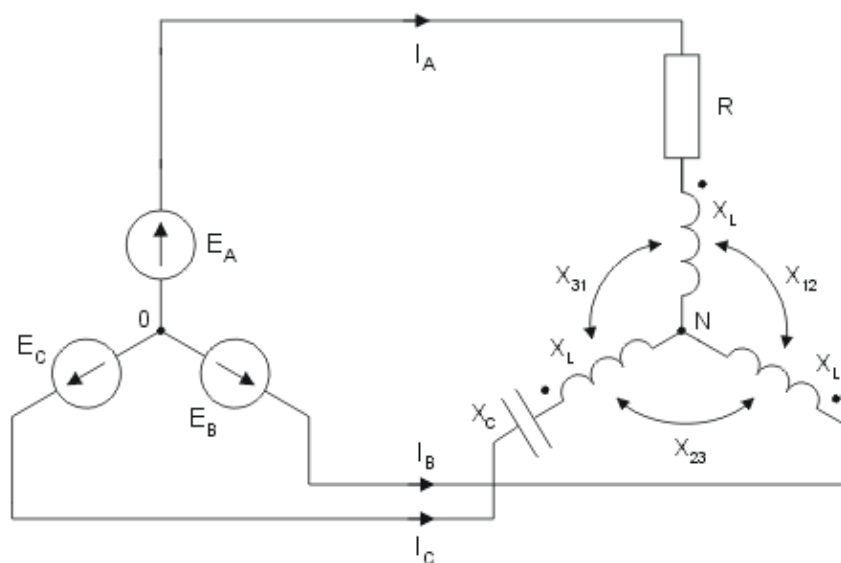


Rys. 8.13. Wykres wektorowy prądów i napięć w układzie trójfazowym przy zwarciu fazy A odbiornika



Przykład 8.1

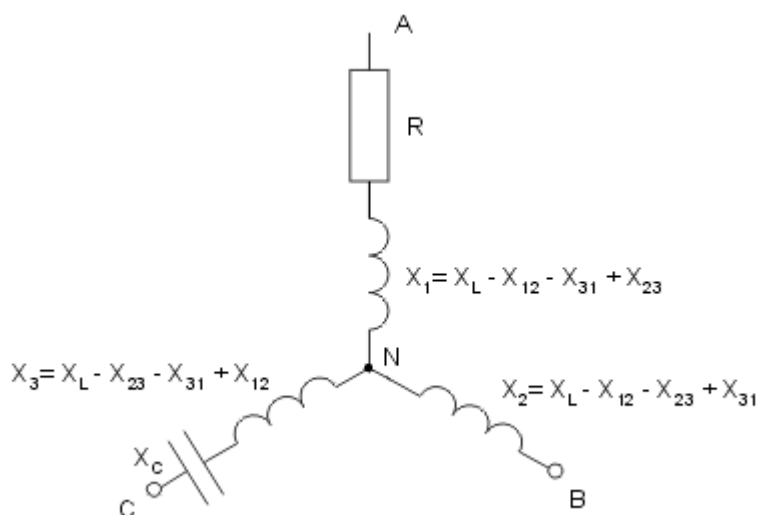
Obliczyć prądy i napięcia poszczególnych faz odbiornika w układzie przedstawionym na rys. 8.14. Przyjąć zasilanie trójfazowe symetryczne o napięciu fazowym równym 400V. Wartości parametrów obwodu są następujące: $R=40\Omega$, $X_C=30\Omega$, $X_L=60\Omega$, $X_{12}=10\Omega$, $X_{23}=20\Omega$, $X_{31}=20\Omega$.



Rys. 8.14. Schemat układu trójfazowego do przykładu 8.1

Rozwiązanie

Ze względu na występowanie sprzężenia magnetycznego pierwszym etapem rozwiązania jest eliminacja tych sprzężeń. Układ odbiornika po likwidacji sprzężeń magnetycznych jest przedstawiony na rys. 8.15



Rys. 8.15. Schemat odbiornika trójfazowego po likwidacji sprzężeń magnetycznych

Przyjmijmy układ napięć fazowych generatora w następującej postaci

$$E_A = 400e^{j0}$$

$$E_B = 400e^{-j120^\circ}$$

$$E_C = 400e^{j120^\circ}$$

Impedancje poszczególnych faz odbiornika z rys. 8.15 są równe

$$Z_A = 40 + j40 = 40\sqrt{2}e^{j45^\circ}$$

$$Z_B = j60 = 60e^{j90^\circ}$$

$$Z_C = 0$$

Wobec zwarcia w fazie C odbiornika ($Z_C = 0$) nie zachodzi potrzeba stosowania wzoru (8.13) do wyznaczenia napięcia niezrównoważenia, gdyż $U_N = E_C$. W tej sytuacji poszczególne prądy fazowe są równe

$$I_A = \frac{E_A - U_N}{Z_A} = \frac{400 - 400e^{j120^\circ}}{40\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = 5\sqrt{2}e^{-j75^\circ} = 1,8 - j6,8$$

$$I_B = \frac{E_B - U_N}{Z_B} = \frac{400e^{-j120^\circ} - 400e^{j120^\circ}}{60e^{j90^\circ}} = -11,6$$

.

$$I_C = -I_A - I_B = 9,8 + j6,8$$

Po obliczeniu prądów na podstawie schematu zastępczego bez sprzężeń magnetycznych dla wyznaczenia napięć w układzie należy powrócić do obwodu ze sprzężeniami. Rzeczywiste napięcia na fazach odbiornika wynoszą

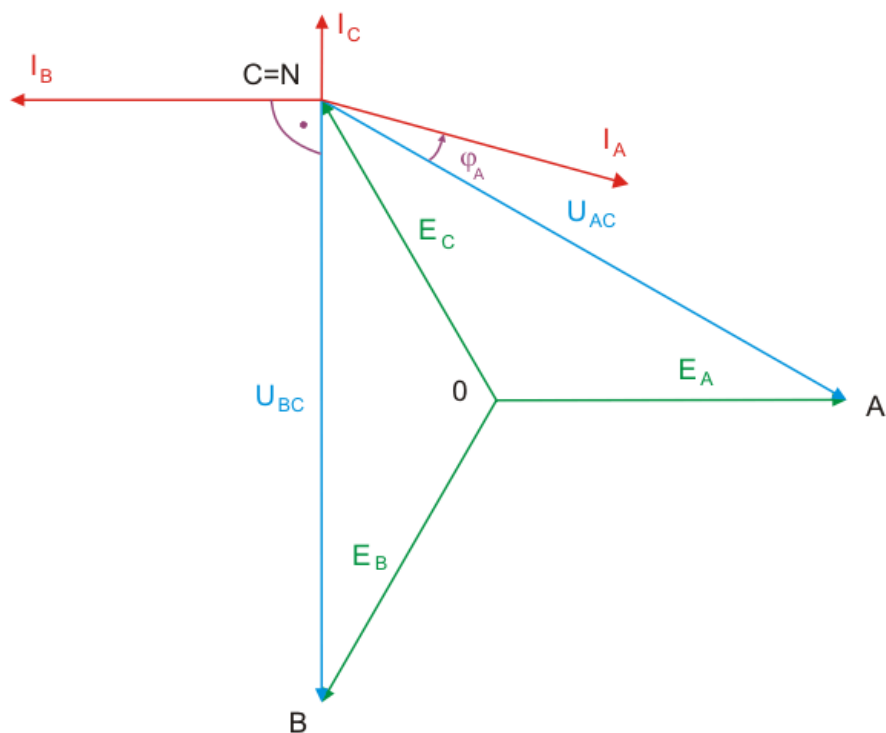
$$U_A = RI_A + jX_L I_A + jX_{12} I_B + jX_{31} I_C = 322 + j263$$

$$U_B = jX_L I_B + jX_{12} I_A + jX_{23} I_C = -18 - j335$$

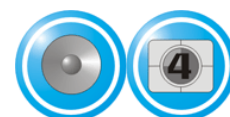
$$U_C = jX_L I_C + jX_{31} I_A + jX_{23} I_B - jX_C I_C = -18$$

Zauważmy, że istnieje ogromna różnica między rzeczywistym napięciem U_C w fazie C, $U_C = -18$, a napięciem w tej samej fazie w obwodzie po likwidacji sprzężeń, $U_C = 0$. Obwód po likwidacji sprzężeń jest równoważny obwodowi oryginalnemu jedynie pod względem prądowym. Napięcia na gałęziach zawierających cewki sprzężone nie odpowiadają

ich odpowiednikom w obwodzie bez sprzężeń. Na rys. 8.16 przedstawiono wykres wektorowy prądów i napięć w obwodzie po likwidacji sprzężeń.

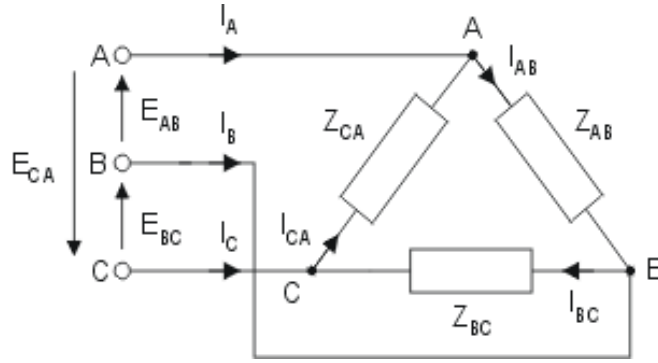


Rys. 8.16. Wykres wektorowy układu trójfazowego po likwidacji sprzężeń magnetycznych w przykładzie 8.1



8.2.3 Układ trójkątny faz odbiornika i generatora

Schemat elektryczny połączeń elementów obwodu trójfazowego o odbiorniku i generatorze połączonych w trójkąt (układ trójkąt-trójkąt) przedstawia rys. 8.17.



Rys. 8.17. Układ trójfazowy trójkątny

Przyjmijmy dla uproszczenia, że impedancje przewodów zasilających poszczególne fazy są zerowe. Oznacza to, że napięcia na fazach odbiornika (włączonych międzyfazowo) są napięciami międzyfazowymi generatora, to jest

$$U_{AB} = E_{AB} \quad (8.39)$$

$$U_{BC} = E_{BC} \quad (8.40)$$

$$U_{CA} = E_{CA} \quad (8.41)$$

Stąd przy zadanych wartościach impedancji odbiornika prądy fazowe tego odbiornika są określone wzorami

$$I_{AB} = Y_{AB} E_{AB} \quad (8.42)$$

$$I_{BC} = Y_{BC} E_{BC} \quad (8.43)$$

$$I_{CA} = Y_{CA} E_{CA} \quad (8.44)$$

Prądy przewodowe zasilające obwód trójkątny odbiornika mogą być wyznaczone z zależności

$$I_A = I_{AB} - I_{CA} \quad (8.45a)$$

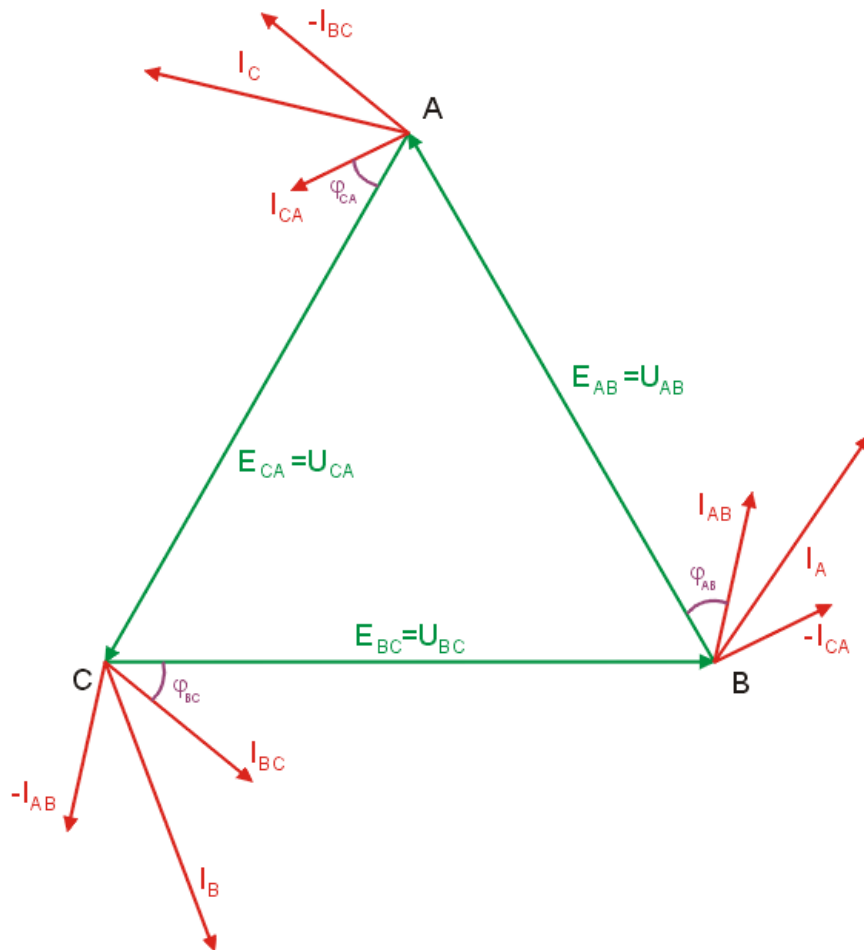
$$I_B = I_{BC} - I_{AB} \quad (8.45b)$$

$$I_C = I_{CA} - I_{BC} \quad (8.45c)$$

Zauważmy, że wobec powyższych wzorów suma prądów przewodowych w układzie, niezależnie od wartości impedancji odbiornika jest równa zero

$$I_A + I_B + I_C = 0 \quad (8.46)$$

Rys. 8.18 przedstawia wykres wektorowy prądów i napięć w układzie trójfazowym o połączeniu trójkątnym.



Rys. 8.18. Wykres wektorowy prądów i napięć w układzie trójfazowym o połączeniu trójkątnym



W przypadku pełnej symetrii generatora i odbiornika wszystkie układy napięć i prądów w układzie będą również symetryczne a przesunięcia między prądami oraz napięciami poszczególnych faz w odpowiednich układach będą równe 120° . Interesująca jest wówczas relacja między prądami fazowymi oraz liniowymi układu. Z wykresu wektorowego

przedstawionego na rys. 8.18 widać, że w przypadku symetrycznym moduły wszystkich prądów liniowych są sobie równe, podobnie jak moduły wszystkich prądów fazowych przy równych przesunięciach fazowych między wektorami o kąt 120° . Z analizy przesunięć kątowych wynika, że kąt między wektorem prądu fazowego I_f oraz liniowego I_l jest równy 30° . Z zależności trygonometrycznych wynika, że

$$\frac{0,5|I_l|}{|I_f|} = \cos 30^\circ \quad (8.47)$$

skąd po prostych przekształceniach matematycznych otrzymuje się

$$|I_l| = 2|I_f|\cos 30^\circ = \sqrt{3}|I_f| \quad (8.48)$$

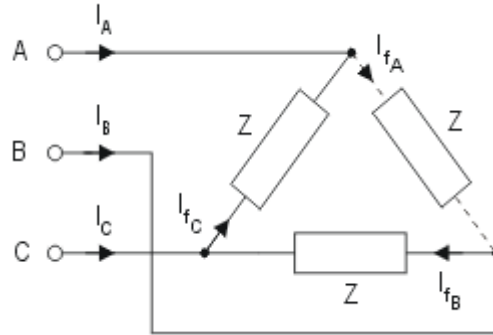
W układzie symetrycznym prąd liniowy jest $\sqrt{3}$ razy większy niż prąd fazowy. Jest to identyczna relacja jaka istnieje między napięciami fazowymi i międzyfazowymi (liniowymi).

Przykład 8.2

Obliczyć prądy w żyłach kabla zasilającego silnik trójfazowy o mocy $P = 47,5\text{kW}$, $\cos\varphi = 0,9$ i napięciu liniowym (miedzyprzewodowym) równym 380V . Założyć połączenie faz silnika w trójkąt. Przyjąć 80% sprawność silnika ($\eta = 0,8$). Moc silnika z uwzględnieniem sprawności wyraża się wzorem $P = 3\eta|U_f||I_f|\cos\varphi$. Jak zmieniają się prądy po rozwarciu jednej z faz silnika, np. fazy A.

Rozwiązanie

Schemat zastępczy silnika w postaci trzech identycznych impedancji Z połączonych w trójkąt przedstawiony jest na rys. 8.19.



Rys. 8.19. Schemat połączeń faz silnika trójfazowego

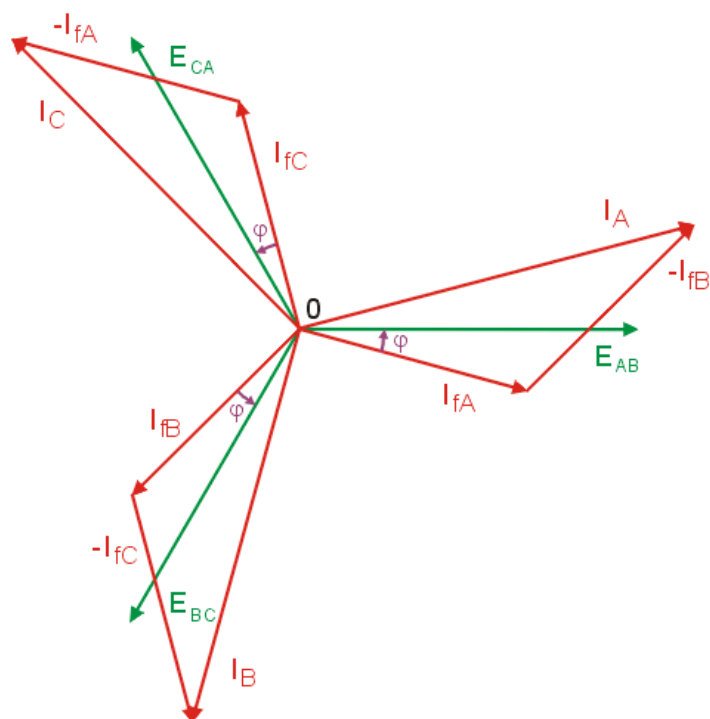
Przy symetrycznym połączeniu faz silnika, przez poszczególne fazy o równej impedancji Z przepływają prądy o tej samej wartości, przesunięte względem siebie o kąt 120° opóźnione względem odpowiednich napięć fazowych (silnik ma charakter indukcyjny) o ten sam kąt φ . Napięcie fazowe odbiornika jest równe napięciu międzyfazowemu generatora, stąd $U_f = U_{mf} = 380V$. Uwzględniając wzór na moc silnika otrzymuje się

$$|I_f| = \frac{P}{3\eta|U_f|\cos\varphi} = 57,7A$$

Przy pełnej symetrii połączeń faz silnika wszystkie prądy liniowe zasilające ten silnik są również symetryczne, czyli równe co do modułu i przesunięte w fazie o kąt 120° . Oznacza to, że

$$|I_A| = |I_B| = |I_C| = \sqrt{3}|I_f| = 100A$$

Na rys. 8. 20 przedstawiono wykres wektorowy prądów i napięć w silniku trójfazowym przy pełnej symetrii połączeń.



Rys. 8.20. Wykres wektorowy prądów i napięć silnika trójfazowego w warunkach pełnej symetrii



W przypadku przerwy jednej z faz odbiornika, np. fazy A, prąd tej fazy jest równy zero, natomiast pozostałych faz jest niezmienny. Uwzględniając przerwę w fazie A obwodu z rys. 8.18, prąd liniowy w fazie A i B jest teraz równy prądowi fazowemu silnika, natomiast prąd liniowy fazy C pozostał nie zmieniony w stosunku do przypadku symetrii, to znaczy

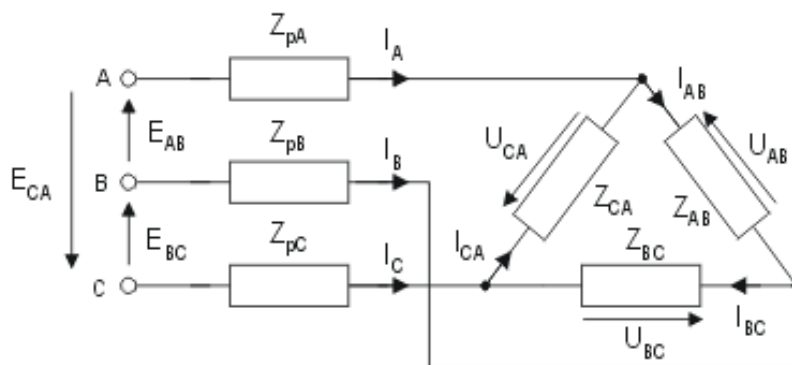
$$|I_A| = |I_f| = 57,7 A$$

$$|I_B| = |I_f| = 57,7 A$$

$$|I_C| = \sqrt{3} |I_f| = 100 A$$

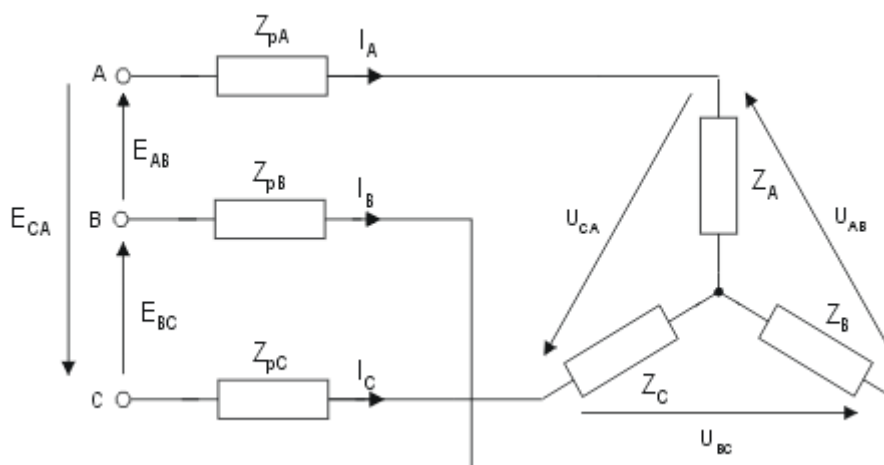
Najbardziej obciążonym przewodem zasilającym jest teraz przewód fazy C. Pozostałe przewody zasilające przenoszą prąd zmniejszony w stosunku do normalnej pracy silnika.

Oddzielnym problemem przy analizie układu trójfazowego połączanego w trójkąt jest uwzględnienie impedancji przewodów zasilających. Przypadek taki pokazany jest na rys. 8.21.



Rys. 8.21. Zasilanie odbiornika trójfazowego trójkątnego z uwzględnieniem impedancji przewodów zasilających

Przy nieznanymi prądach liniowych nie można obliczyć napięć panujących na odbiorniku, gdyż nieznane są spadki napięć na impedancjach przewodów zasilających. To z kolei uniemożliwia wyznaczenie prądów fazowych tego odbiornika. Aby uzyskać rozwiązanie należy w pierwszej kolejności zamienić trójkąt impedancji na równoważny mu układ gwiazdowy (rys. 8.22).



Rys. 8.22. Układ trójfazowy gwiazdowy równoważny układowi trójkątnemu z rys. 8.20

W wyniku zamiany otrzymuje się znany już układ gwiazda-gwiazda, w którym impedancje fazowe oraz impedancje przewodów doprowadzających są połączone szeregowo stanowiąc

rozszerzoną impedancję poszczególnych faz. Stosując znaną metodykę rozwiązania takiego układu oblicza się wszystkie prądy liniowe I_A , I_B oraz I_C .

Po obliczeniu prądów liniowych można obliczyć napięcia międzyfazowe w rzeczywistym odbiorniku z rys. 8.21 jako

$$U_{AB} = Z_A I_A - Z_B I_B \quad (8.49)$$

$$U_{BC} = Z_B I_B - Z_C I_C \quad (8.50)$$

$$U_{CA} = Z_C I_C - Z_A I_A \quad (8.51)$$

Po obliczeniu napięć fazowych odbiornika wyznaczenie prądów odbywa się na podstawie prawa Ohma

$$I_{AB} = \frac{U_{AB}}{Z_{AB}} \quad (8.52)$$

$$I_{BC} = \frac{U_{BC}}{Z_{BC}} \quad (8.53)$$

$$I_{CA} = \frac{U_{CA}}{Z_{CA}} \quad (8.54)$$

Omówione tu połączenia układu trójfazowego w gwiazdę i trójkąt są podstawowymi układami pracy w systemach trójfazowych. Jeśli w analizie wystąpi połączenie mieszane, np. gwiazda-trójkąt lub trójkąt-gwiazda należy w pierwszej kolejności drogą odpowiedniej zamiany trójkąta na gwiazdę lub gwiazdy na trójkąt doprowadzić do jednego z wcześniej omówionych układów a następnie wykonać odpowiednie obliczenia stosując jedną z poznanych metod.

8.3. Pomiar mocy w układach trójfazowych

8.3.1. Pomiar mocy czynnej w układzie czteroprzewodowym

Z bilansu mocy w układzie trójfazowym wynika, że moc wytworzona w generatorze trójfazowym równa sumie mocy poszczególnych jego faz odnajduje się w postaci mocy wydzielonej w fazach odbiornika. W przypadku mocy chwilowej wydzielonej w odbiorniku mamy

$$p(t) = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C \quad (8.55)$$

Moc czynna P odbiornika jest całką po okresie T z mocy chwilowej. Stąd

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u_A i_A dt + \frac{1}{T} \int_0^T u_B i_B dt + \frac{1}{T} \int_0^T u_C i_C dt \quad (8.56)$$

Poszczególne składniki sumy odpowiadają mocy poszczególnych faz. Adaptując wzory na moc w układzie jednofazowym otrzymuje się

$$P = |U_A| |I_A| \cos \varphi_A + |U_B| |I_B| \cos \varphi_B + |U_C| |I_C| \cos \varphi_C \quad (8.57)$$

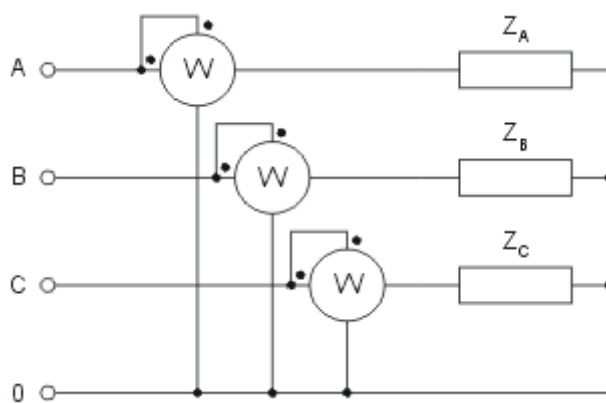
gdzie

- $|U_A|, |U_B|, |U_C|$ - moduły wartości skutecznych napięć fazowych odbiornika,
- $|I_A|, |I_B|, |I_C|$ - moduły wartości skutecznych prądów fazowych odbiornika
- $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$ - kąty przesunięć fazowych między napięciami i prądami faz

Wzór określający całkowitą moc czynną w układzie trójfazowym można więc przedstawić jako

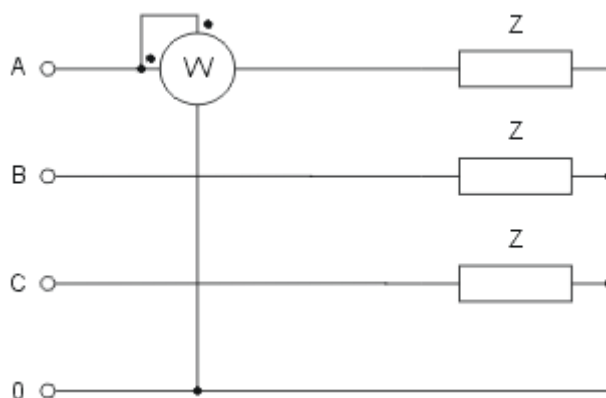
$$P = P_A + P_B + P_C \quad (8.58)$$

Moc czynna pobierana przez odbiornik trójfazowy jest równa sumie mocy czynnych poszczególnych faz. W przypadku ogólnym obwodu trójfazowego niesymetrycznego, w którym nie ma korelacji między poszczególnymi fazami pomiar mocy czynnej wymaga użycia trzech watomierzy, z których każdy mierzy moc jednej fazy. Schemat połączeń trzech watomierzy w tym przypadku przedstawiono na rys. 8.23. Cewka prądowa każdego watomierza zasilana jest odpowiednim prądem fazowym a cewka napięciowa mierzy napięcie odpowiedniej fazy.



Rys. 8.23. Pomiar mocy czynnej za pomocą trzech watomierzy w układzie niesymetrycznym czteroprzewodowym

W przypadku układu symetrycznego ze względu na równość prądów i przesunięć kątowych w poszczególnych fazach odbiornika moc wskazywana przez każdy watomierz byłaby taka sama. Stąd do pomiaru mocy w tym układzie wystarczy użycie jednego watomierza (rys. 8. 24)



Rys. 8.24. Pomiar mocy czynnej w układzie trójfazowym symetrycznym czteroprzewodowym za pomocą jednego watomierza

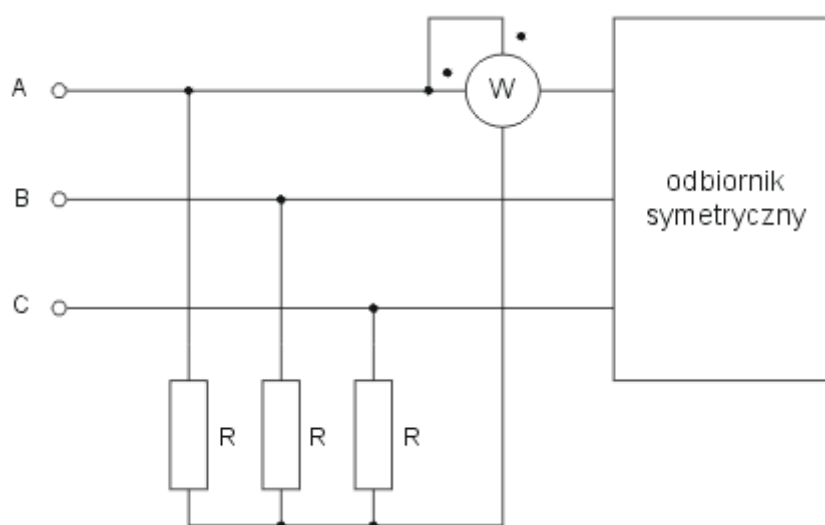
Moc całkowita P układu trójfazowego jest potrojoną wartością wskazania watomierza

$$P = 3P_A \quad (8.59)$$

Wobec pełnej symetrii odbiornika watomierz może być włączony w dowolnej fazie, niekoniecznie w fazie A. W każdym przypadku watomierz włączony w danej fazie mierzy prąd fazy i napięcie fazowe względem punktu neutralnego.

8.3.2. Pomiar mocy czynnej w układzie trójprzewodowym

Jeśli układ symetryczny odbiornika jest zasilany trzema przewodami (brak dostępu do punktu zerowego) wówczas pomiar mocy jednym watomierzem wymaga utworzenia sztucznego punktu o potencjale równym potencjałowi punktu zerowego. Biorąc pod uwagę, że przy symetrycznym odbiorniku potencjał $U_N=0$ punkt o potencjale zerowym można wytworzyć stosując dodatkowy układ trzech rezystorów i włączając końcówkę watomierza do tego układu, jak to pokazano na rysunku 8.25.



Rys. 8.25. Pomiar mocy czynnej w układzie symetrycznym trójprzewodowym za pomocą jednego watomierza



W przypadku odbiornika niesymetrycznego o trzech przewodach zasilających pomiar całkowitej mocy układu może być dokonany przy pomocy dwu watomierzy. Dla pokazania takiej możliwości przepisujemy wzór na moc chwilową układu

$$p(t) = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C \quad (8.60)$$

W układzie trójprzewodowym suma prądów przewodowych jest równa zero, co znaczy, że

$$i_A + i_B + i_C = 0 \quad (8.61)$$

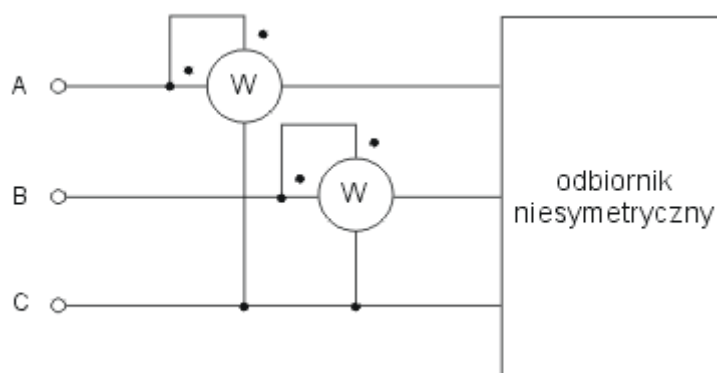
Eliminując prąd i_C z zależności na moc chwilową, uzyskuje się

$$p(t) = (u_A - u_C)i_A + (u_B - u_C)i_B \quad (8.62)$$

Moc czynna jako wartość średnia za okres z mocy chwilowej dla przebiegów sinusoidalnych może więc być wyrażona w postaci

$$P = |U_A - U_C||I_A|\cos\varphi_1 + |U_B - U_C||I_B|\cos\varphi_2 \quad (8.63)$$

W wyrażeniu tym prądy i napięcia dotyczą modułów wartości skutecznych odpowiednich faz natomiast kąty φ_1 i φ_2 oznaczają przesunięcia fazowe między odpowiednio napięciem U_{AC} i prądem I_A oraz między napięciem U_{BC} i prądem I_B . Powyższa zależność umożliwia podanie schematu elektrycznego połączeń elementów pomiarowych obwodu. Schemat pomiaru mocy przy pomocy dwu watomierzy nosi nazwę **układu Arona** i podany jest na rys. 8.26.



Rys. 8.26. Układ Arona do pomiaru mocy za pomocą dwu watomierzy

Cewki prądowe watomierzy włączone są w dwie linie odbiornika trójfazowego, natomiast cewki napięciowe włączone są między daną fazę i fazę trzecią, w której nie ma włączonego watomierza.

Powyższy schemat pomiarowy jest słuszny zarówno dla układu niesymetrycznego jak i symetrycznego. W przypadku układu symetrycznego zastosowanie go do pomiaru mocy

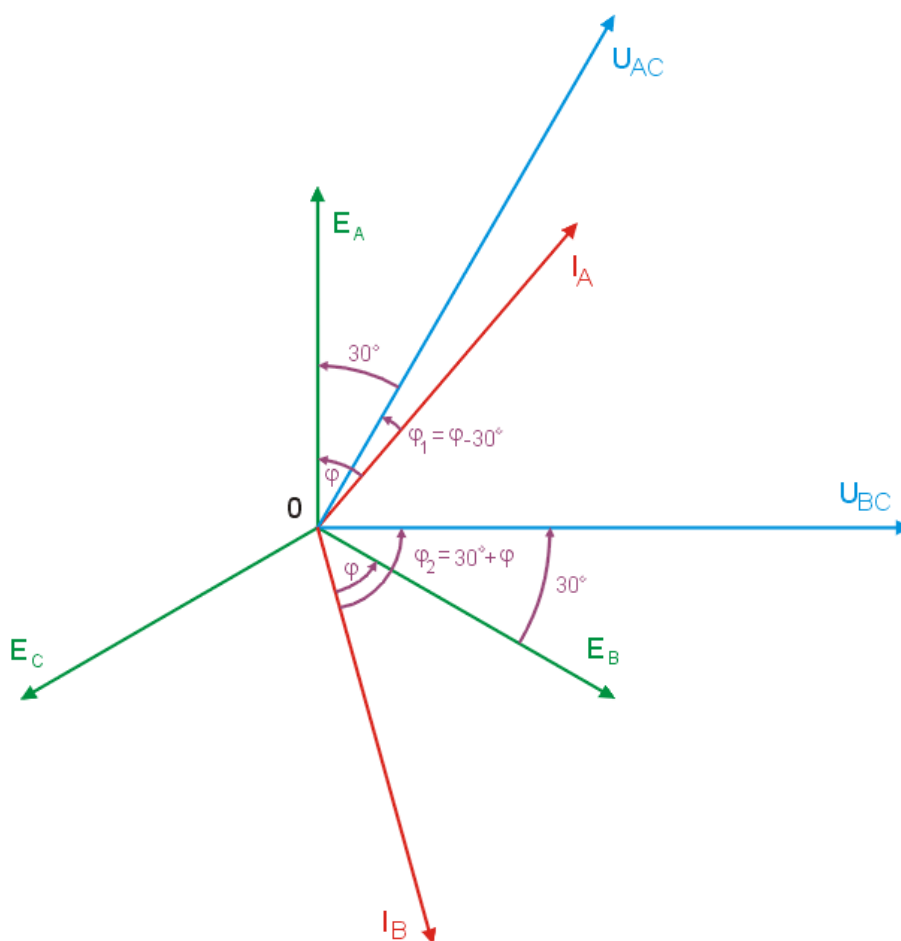
czynnej umożliwia uzyskanie także innych informacji o obwodzie trójfazowym, w szczególności mocy biernej oraz kąta przesunięcia fazowego.

Zauważmy, że w przypadku pełnej symetrii moduły i kąty przesunięcia fazowego prądów względem odpowiednich napięć fazowych w poszczególnych fazach są równe

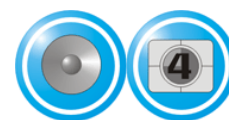
$$|I_A| = |I_B| = |I_C| = |I| \quad (8.64)$$

$$\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C = \varphi \quad (8.65)$$

Przy założeniu odbiornika gwiazdowego wykres wektorowy prądów i napięć obwodu przedstawiony jest na rys. 8.27.



Rys. 8.27. Wykres wektorowy prądów i napięć symetrycznego układu trójfazowego



Z analizy zależności kątowych na tym rysunku wynika, że

$$\varphi_1 = \varphi - 30^\circ \quad (8.66)$$

$$\varphi_2 = \varphi + 30^\circ \quad (8.67)$$

Stąd wzór na moc wskazywaną przez oba watomierze upraszcza się do postaci

$$P_1 = |U_A - U_C| |I| \cos(\varphi - 30^\circ) = \sqrt{3} |U_f| |I| \cos(\varphi - 30^\circ) = \sqrt{3} |U_f| |I| (\cos \varphi \cos 30^\circ + \sin \varphi \sin 30^\circ) \quad (8.68)$$

$$P_2 = |U_B - U_C| |I| \cos(\varphi + 30^\circ) = \sqrt{3} |U_f| |I| \cos(\varphi + 30^\circ) = \sqrt{3} |U_f| |I| (\cos \varphi \cos 30^\circ - \sin \varphi \sin 30^\circ) \quad (8.69)$$

Suma obu wskazań watomierzy jest więc równa

$$P = P_1 + P_2 = 2\sqrt{3} |U_f| |I| \cos \varphi \cos 30^\circ = 3 |U_f| |I| \cos \varphi \quad (8.70)$$

Jak widać suma wskazań obu watomierzy jest potrojoną wartością mocy jednej fazy, co wobec symetrii odbiornika jest potwierdzeniem poprawności działania układu Arona.

8.3.3. Pomiar mocy biernej w układzie trójfazowym symetrycznym

Odejmując od siebie wskazania obu przyrządów udowodnimy, że różnica wskazań jest proporcjonalna do mocy biernej układu. Mianowicie

$$P_1 - P_2 = 2\sqrt{3} |U_f| |I| \sin \varphi \sin 30^\circ = \sqrt{3} |U_f| |I| \sin \varphi \quad (8.71)$$

Biorąc pod uwagę, że moc bierna jednej fazy jest równa $Q_f = |U_f| |I| \sin \varphi$ z ostatniej zależności wynika następujący wzór

$$Q_f = \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{3}} \quad (8.72)$$

a moc bierna całkowita układu trójfazowego symetrycznego jest równa

$$Q = \sqrt{3}(P_1 - P) \quad (8.73)$$

Tak więc zastosowanie dwu watomierzy zamiast jednego, w przypadku symetrii odbiornika, ma tę zaletę, że dostarcza informacji jednocześnie o mocy czynnej i mocy biernej układu. Dodatkowo, jeśli uwzględnimy, że kąt przesunięcia fazowego jest w pełni określony przez moc czynną i bierną według wzoru

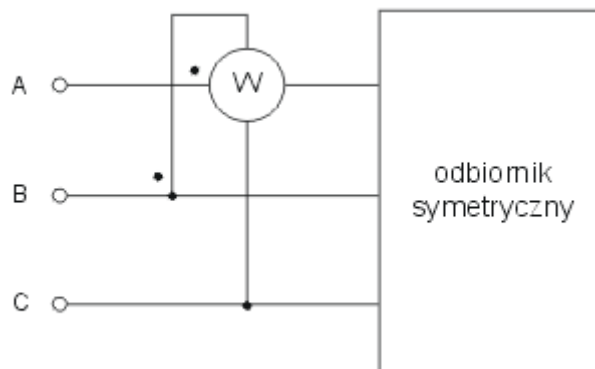
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P} \quad (8.74)$$

na podstawie wskazań watomierzy można bezpośrednio określić kąt przesunięcia fazowego między prądami i napięciami fazowymi w układzie

$$\varphi = \arctg \sqrt{3} \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} \quad (8.75)$$

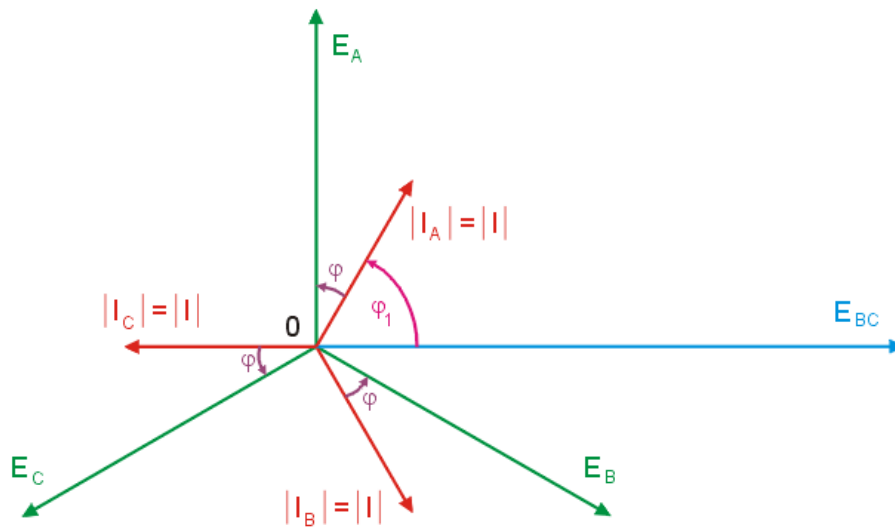
Stąd na podstawie pomiaru mocy dwoma watomierzami jest możliwe określenie trzech wielkości jednocześnie: mocy czynnej, mocy biernej oraz kąta przesunięcia fazowego między prądami i napięciami w obwodzie.

Jeśli interesuje nas jedynie moc bierna można ją zmierzyć stosując tylko jeden watomierz. Układ pomiarowy w tym przypadku pokazany jest na rys. 8.28



Rys. 8.28. Pomiar mocy biernej przy pomocy jednego watomierza

Cewka prądowa watomierza mierzy prąd jednej fazy a cewka napięciowa włączona jest między dwie pozostałe fazy. Watomierz mierzy moc wynikającą z iloczynu prądu I_A , napięcia U_{BC} oraz kosinusa kąta zawartego między wektorem prądu I_A i napięcia U_{BC} . Wykres wektorowy prądów i napięć w obwodzie z zaznaczeniem poszukiwanego kąta fazowego φ_1 między prądem I_A a napięciem U_{BC} przedstawiony jest na rys. 8.29.



Rys. 8.29. Wykres wektorowy prądów i napięć w obwodzie symetrycznym z rys. 8.28



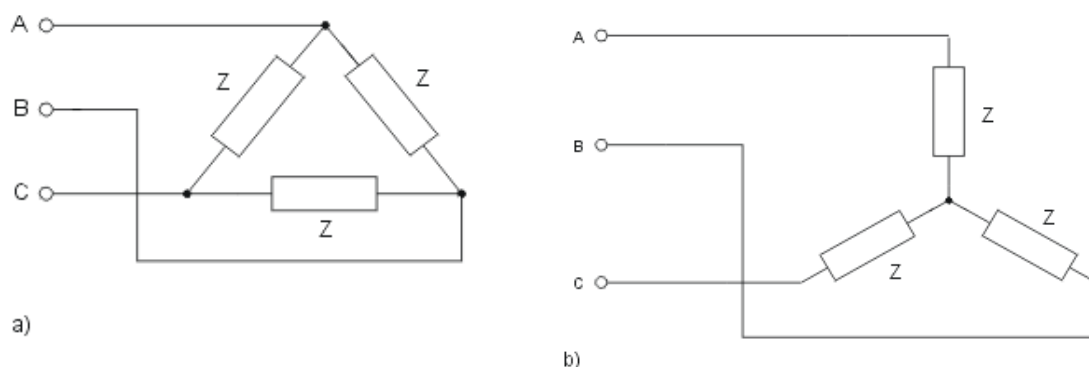
Jest oczywiste, że kąt ten jest równy $\varphi_1 = 90^\circ - \varphi$. Oznacza to, że wskazanie watomierza jest równe

$$P = |I_A| |U_{BC}| \cos \varphi_1 = \sqrt{3} |I| |U_f| \cos(90^\circ - \varphi) = \sqrt{3} |I| |U_f| \sin \varphi \quad (8.76)$$

Całkowita moc bierna Q symetrycznego układu trójfazowego jest równa potrójnej mocy jednej fazy $Q = \sqrt{3}P$.

8.3.4. Porównanie mocy w układzie trójfazowym trójkątnym i gwiazdowym

Przełączenie impedancji odbiornika z połączenia trójkątnego w gwiazdowe powoduje zmianę mocy wydzielonej w odbiorniku. Załóżmy dla uproszczenia, że obwód trójfazowy jest symetryczny o impedancji fazy równej Z . Schemat połączenia trójkątny i gwiazdowy impedancji przedstawiony jest na rys. 8.30.



Rys. 8.30. Układy połączeń impedancji Z odbiornika symetrycznego w a) trójkąt, b) gwiazdę

Jak łatwo pokazać dla układu trójkątnego moc czynna P układu jest równa

$$P = 3 \frac{(\sqrt{3}|U_f|)^2}{|Z|} \cos \varphi = 9 \frac{|U_f|^2}{|Z|} \cos \varphi \quad (8.77)$$

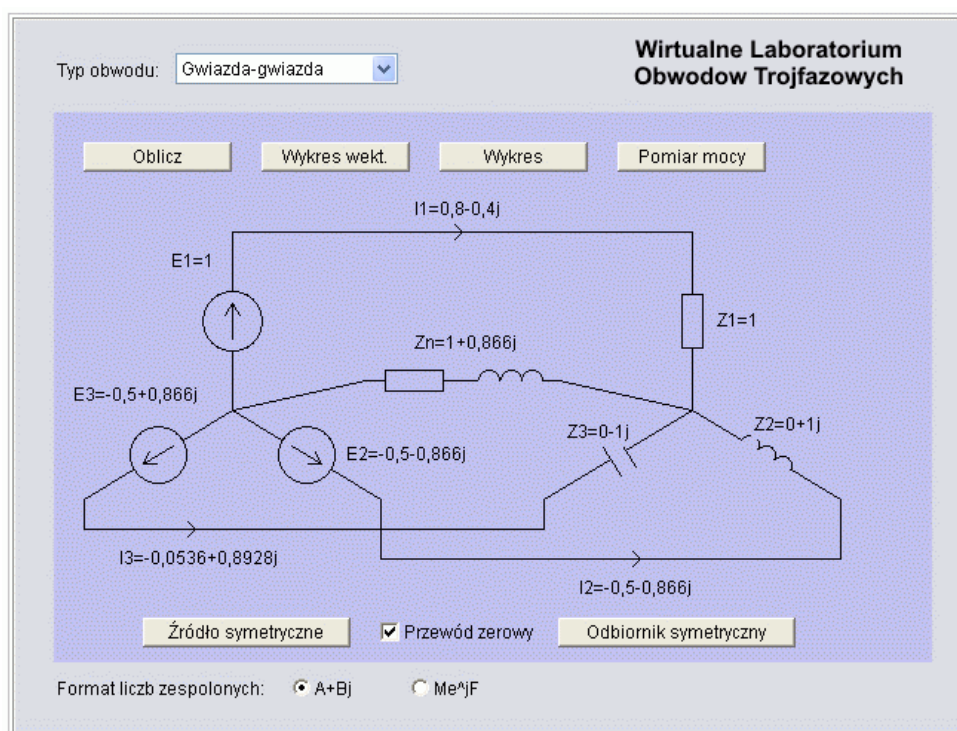
natomiast w układzie gwiazdowym wobec $U_N = 0$ mamy

$$P = 3 \frac{|U_f|^2}{|Z|} \cos \varphi \quad (8.78)$$

Jak wynika z powyższych wzorów przy przełączeniu odbiornika symetrycznego z gwiazdy na trójkąt pobór mocy czynnej wzrasta 3-krotnie. Przy tej samej wartości impedancji w obu połączeniach oznacza to $\sqrt{3}$ -krotny wzrost prądu płynącego przez impedancję.

8.4. Wirtualne laboratorium obwodów elektrycznych

Do obliczeń prądów, napięć i mocy w obwodach trójfazowych został opracowany program „Obwody trójfazowe” pozwalający na symulację pracy takiego układu.



Rys. 8.31. Główne okno programu „Obwody trójfazowe”



Rysunek 8.31 przedstawia okno główne programu. Centralne pole zajmuje schemat badanego obwodu (dostępne konfiguracje: gwiazda-gwiazda Y-Y, gwiazda-trójkąt Y- Δ , trójkąt-trójkąt Δ - Δ i trójkąt-gwiazda Δ -Y), z symbolicznie zaznaczonym odbiornikiem i zasilaniem trójfazowym. Uruchomienie programu odbywa się poprzez kliknięcie w obręb jego ikony. Użytkownik może wówczas definiować własną strukturę obwodu (Δ , Y, przewód zerowy), rodzaj i wartości parametrów odbiornika (R , L , C), wartości źródeł wymuszających, impedancję przewodu zerowego, format liczb zespolonych.

W wyniku obliczeń otrzymuje się wartości prądów, napięć i mocy w obwodzie, jak również wykres wektorowy prądów i napięć oraz ich przebiegi czasowe. Program stanowi efektywne wirtualne laboratorium obwodów trójfazowych, umożliwiające studentowi samodzielne badanie zjawisk zachodzących w obwodach trójfazowych.

8.5. Pole magnetyczne wirujące w układach trójfazowych

Ważnym zastosowaniem układów trójfazowych są maszyny elektryczne, silniki bądź generatory trójfazowe. W silnikach energia elektryczna jest zamieniana na energię

mechaniczną, podczas gdy w generatorach odwrotnie – energia mechaniczna jest przetwarzana na energię elektryczną. Pokażemy, że zamiana energii elektrycznej na energię mechaniczną w postaci ruchu obrotowego jest możliwa w układach trójfazowych za pośrednictwem pola magnetycznego wytwarzanego przez uzwojenia trójfazowe silnika. Jak pokazano w lekcji piątej przepływ prądu I przez uzwojenie o z zwojach jest związane z wytworzeniem pola magnetycznego o natężeniu H . Przy oznaczeniu długości drogi magnetycznej przez l natężenie pola magnetycznego H określa prawo przepływu Ampera, zgodnie z którym

$$H = \frac{zI}{l} \quad (8.79)$$

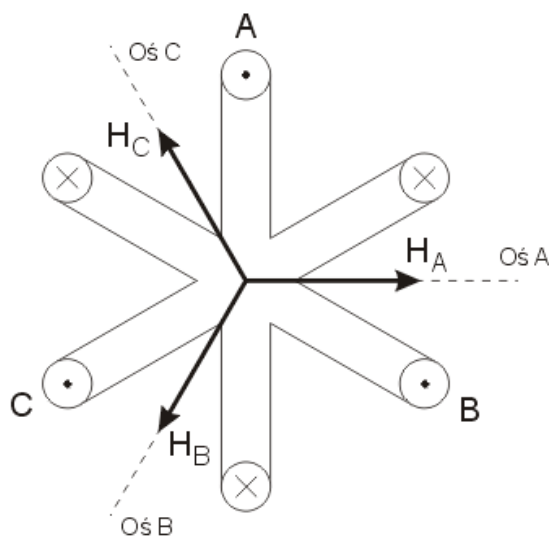
Przy sinusoidalnym prądzie natężenie pola zmienia się również sinusoidalnie. Energia elektryczna w pojedynczym uzwojeniu nie przetworzy się zatem bezpośrednio na energię ruchu, gdyż zwoje przez które przepływa prąd sinusoidalny poddawane są działaniu pola oscylacyjnego o zmiennym co pół okresu kierunku. Dla wytworzenia ruchu uzwojenia musi być ono poddane działaniu wektora o stałej amplitudzie wirującego w czasie. Pole takie może zostać wytworzone między innymi w układzie trójfazowym pod warunkiem rozmieszczenia uzwojeń przesuniętych względem siebie w przestrzeni. Przyjmijmy, że zwoje przez które przepływa prąd trójfazowy

$$i_A = I_m \sin(\omega t) \quad (8.80)$$

$$i_B = I_m \sin(\omega t - 120^\circ) \quad (8.81)$$

$$i_C = I_m \sin(\omega t + 120^\circ) \quad (8.82)$$

rozmieszczone są symetrycznie w przestrzeni z przesunięciem kątowym co 120° jak to pokazano na rys. 8.31



Rys. 8.32. Układ uzwojeń trójfazowych przesuniętych symetrycznie w przestrzeni wytwarzających pola magnetyczne



Na rysunku zaznaczono kierunki wektorów natężenia pola powstające w poszczególnych uzwojeniach. Moduły tych wektorów wynikają z prawa przepływu Ampera i wobec sinusoidalnych prądów fazowych zmieniają się również sinusoidalnie

$$H_A(t) = H_m \sin(\omega t) \quad (8.83)$$

$$H_B(t) = H_m \sin(\omega t - 120^\circ) \quad (8.84)$$

$$H_C(t) = H_m \sin(\omega t + 120^\circ) \quad (8.85)$$

Wypadkowe pole magnetyczne wynika z sumy poszczególnych wektorów $\mathbf{H}_A(t)$, $\mathbf{H}_B(t)$, $\mathbf{H}_C(t)$ pochodzących od wszystkich faz układu trójfazowego. Moduły wartości tych wektorów są opisane wzorami jak wyżej natomiast ich kierunki są przesunięte symetrycznie o kąt 120° jak to pokazano na rys. 8.31.

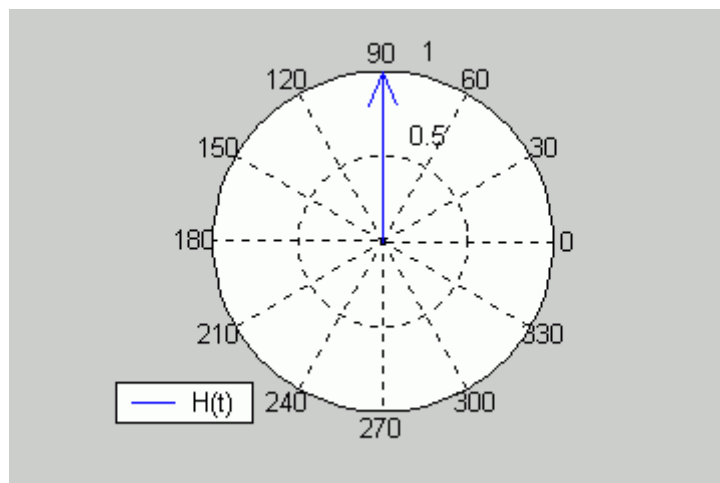
Umieścimy wektory natężenia pola magnetycznego na płaszczyźnie zespolonej, przyjmując oś rzeczywistą zgodnie z kierunkiem składowej fazy A. Wtedy wektor wypadkowy $\mathbf{H}(t)$ może być opisany wzorem

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(t) &= \mathbf{H}_A(t) + e^{-j120^\circ} \mathbf{H}_B(t) + e^{j120^\circ} \mathbf{H}_C(t) = \\
H_m \left[\sin(\omega t) + \left(-0,5 - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sin(\omega t - 120^\circ) + \left(-0,5 + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sin(\omega t + 120^\circ) \right] &= \\
= H_m \left[\sin(\omega t) - \sin(\omega t) \cos 120^\circ + j \sqrt{3} \sin 120^\circ \cos(\omega t) \right] &= \\
\frac{3}{2} H_m \left[\sin(\omega t) + j \cos(\omega t) \right] = \frac{3}{2} H_m \left[\cos(\omega t) - j \sin(\omega t) \right] = j \frac{3}{2} H_m e^{-j\omega t} = \frac{3}{2} H_m e^{j(90^\circ - \omega t)} &
\end{aligned} \tag{8.86}$$

Oznacza to, że

- wektor wypadkowy natężenia pola magnetycznego $\mathbf{H}(t)$ jest wektorem wirującym jednostajnie w czasie z prędkością kątową równą ω zgodnie z ruchem wskazówek zegara
- moduł tego wektora jest stały i równy $|\mathbf{H}(t)| = \frac{3}{2} H_m$.

Wytworzone przez trójfazowy układ uzwojeń pole magnetyczne jest więc polem wirującym zdolne do nadania ruchu tym uzwojeniom. Pozwala zamienić energię elektryczną w energię mechaniczną. Kierunek ruchu wynika z przyjętego kierunku wirowania faz napięcia zasilającego trójfazowego. Przy założonym przez nas układzie zgodnym kierunek wirowania pola jest zgodny z kierunkiem wskazówek zegara. Przy zamianie kolejności faz w układzie trójfazowym (faza B zamieniona z C) mamy do czynienia z kierunkiem przeciwnym wirowania faz. W przypadku pola magnetycznego oznaczać to będzie zmianę wirowania pola na przeciwny do ruchu wskazówek zegara. Na rys. 8.32 zilustrowano wirowanie pola magnetycznego powstałego w omówionym układzie trzech cewek



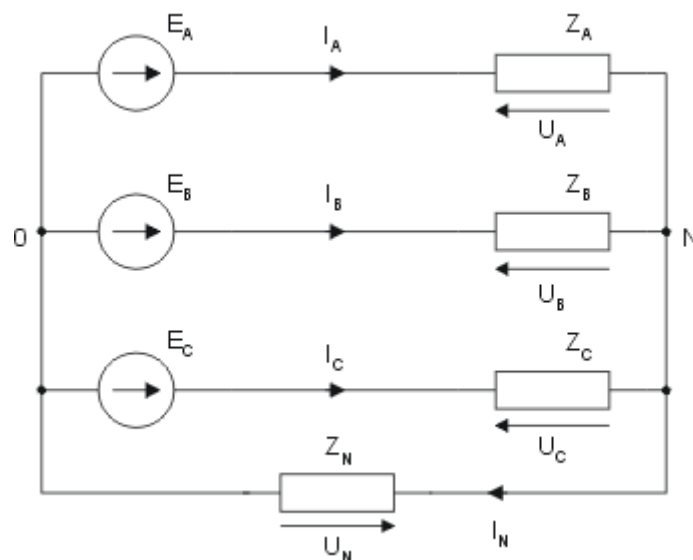
Rys. 8.33. Ilustracja wirowania wektora wirującego $\mathbf{H}$



Zadania sprawdzające

Zadanie 8.1

Wyznaczyć prądy w obwodzie trójfazowym podanym na rys. 8.33. Przyjąć następujące wartości parametrów elementów: $|E_f| = 200V$, $Z_A = 10\Omega$, $Z_B = (10-j10)\Omega$, $Z_C = (10+j10)\Omega$, $Z_N = 50\Omega$.



Rys. 8.34. Schemat obwodu trójfazowego do zadania 8.1

Rozwiązanie

Przyjmujemy następujące wartości symboliczne elementów:

$$E_A = 200$$

$$E_B = 200e^{-j120^\circ}$$

$$E_C = 200e^{j120^\circ}$$

$$Y_A = \frac{1}{Z_A} = 0,1$$

$$Y_B = \frac{1}{Z_B} = 0,05 + j0,05$$

$$Y_C = \frac{1}{Z_C} = 0,05 - j0,05$$

$$Y_N = \frac{1}{Z_N} = 0,02$$

Napięcie niezrównoważenia U_N

$$U_N = \frac{E_A Y_A + E_B Y_B + E_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_N} = 124,18$$

Prądy fazowe:

$$I_A = (E_A - U_N) Y_A = 7,58$$

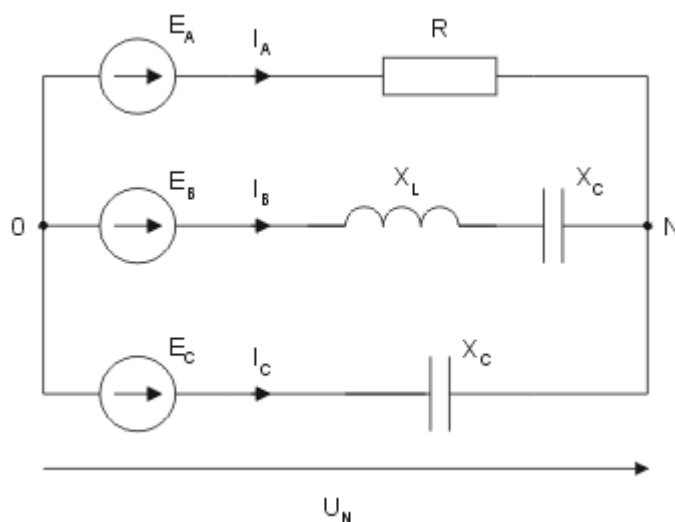
$$I_B = (E_B - U_N) Y_B = -2,55 - j19,87$$

$$I_C = (E_C - U_N) Y_C = 2,55 + j19,87$$

$$I_A = U_N Y_N = 2,48$$

Zadanie 8.2

Wyznaczyć prądy w układzie trójfazowym przedstawionym na rys. 8.34. Przyjąć następujące wartości parametrów elementów: $|E_f| = 200V$, $R = 100\Omega$, $X_L = 50\Omega$, $X_C = 50\Omega$.



Rys. 8.35. Schemat obwodu trójfazowego do zadania 8.2

Rozwiązanie

Przyjmujemy następujące wartości symboliczne elementów:

$$E_A = 200$$

$$E_B = 200e^{-j120^\circ}$$

$$E_C = 200e^{j120^\circ}$$

$$Z_B = jX_L - jX_C = 0$$

$$Y_A = \frac{1}{R} = 0,01$$

$$Y_B = \frac{1}{Z_B} = \infty$$

$$Y_C = \frac{1}{Z_C} = j0,02$$

Wobec zwarcia w fazie B napięcie niezrównoważenia $U_N = E_B$.

Prądy fazowe:

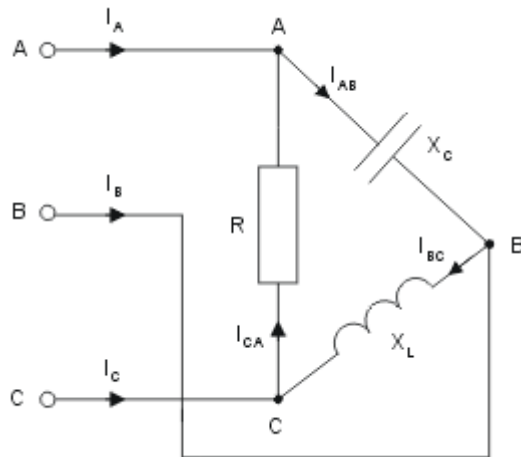
$$I_A = (E_A - U_N)Y_A = 3 + j1,73$$

$$I_C = (E_C - U_N)Y_C = -6,93$$

$$I_B = -(I_A + I_C) = 3,93 - j1,73$$

Zadanie 8.3

Wyznaczyć prądy w układzie trójfazowym o odbiorniku połączonym w trójkąt przedstawionym na rys. 8.35. Sporządzić wykres wektorowy prądów i napięć. Przyjąć następujące wartości parametrów elementów: $|E_f| = 200V$, $R = X_L = X_C = 10\Omega$.



Rys. 8.36. Schemat obwodu trójfazowego do zadania 8.3

Rozwiązanie

Napięcia międzyfazowe:

$$|E_{mf}| = \sqrt{3}|E_f|$$

$$E_{AB} = 200\sqrt{3}$$

$$E_{BC} = 200\sqrt{3}e^{-j120^\circ}$$

$$E_{CA} = 200\sqrt{3}e^{j120^\circ}$$

Prądy fazowe odbiornika:

$$I_{AB} = \frac{E_{AB}}{-jX_C} = 20\sqrt{3}e^{j90^\circ}$$

$$I_{BC} = \frac{E_{BC}}{jX_L} = 20\sqrt{3}e^{-j210^\circ}$$

$$I_{CA} = \frac{E_{CA}}{R} = 20\sqrt{3}e^{j120^\circ}$$

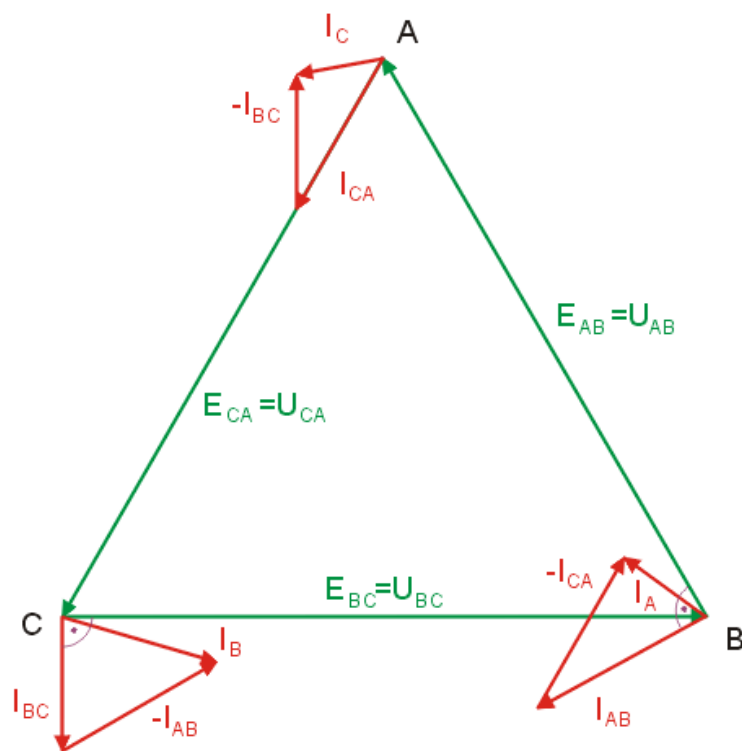
Prądy liniowe układu:

$$I_A = I_{AB} - I_{CA} = 17,32 + j4,64$$

$$I_B = I_{BC} - I_{AB} = -30 - j17,32$$

$$I_C = I_{CA} - I_{BC} = 12,68 + j12,68$$

Wykres wektorowy prądów i napięć przedstawiony jest na rys. 8.36.



Rys. 8.37. Wykres wektorowy prądów i napięć obwodu



Lekcja 9. Składowe symetryczne w układach trójfazowych

Wstęp

Lekcja dziewiąta poświęcona jest składowym symetrycznym: zgodnej, przeciwnej i zerowej, jako opisu obwodów trójfazowych niesymetrycznych. Niesymetria w obwodzie trójfazowym jest zjawiskiem niepożądanym. Wystąpienie składowej innej niż zgodna świadczy o powstałej asymetrii. W lekcji podane zostaną wzory określające poszczególne składowe symetryczne oraz ich podstawowe własności. Wprowadzone zostaną układy filtrów składowych symetrycznych, pozwalające w prosty sposób kontrolować niesymetrię w układzie trójfazowym.

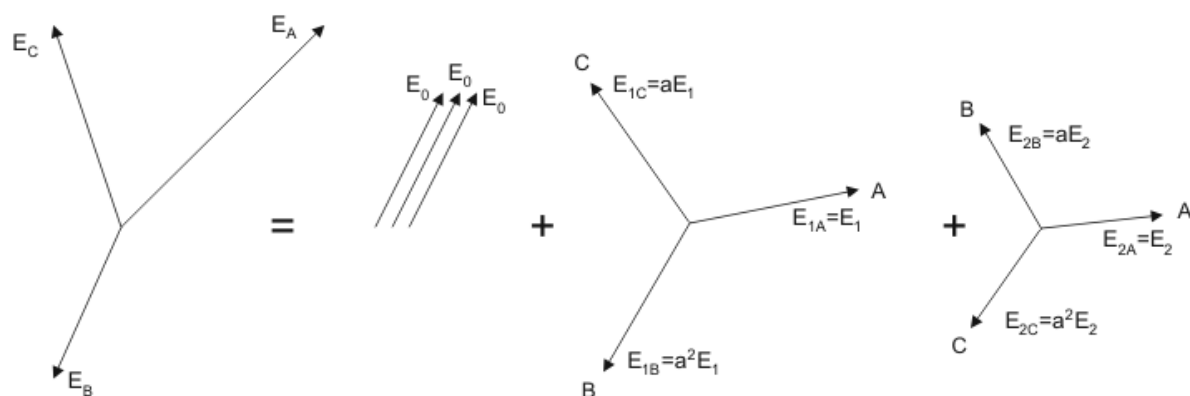


9.1. Rozkład na składowe symetryczne

W dotychczasowych rozważaniach układów trójfazowych ograniczyliśmy się do analizy układów o symetrycznym zasilaniu, czyli takich w których amplitudy wszystkich napięć fazowych są równe, a przesunięcia kątowe między poszczególnymi fazami 120° . W rzeczywistych układach ze względu na skończoną impedancję przewodów zasilających przy różnych prądach fazowych powstają różnice w napięciach fazowych generatora „wychodzących” na linię. Oznacza to różnice zarówno w amplitudach poszczególnych napięć jak i przesunięciach fazowych w stosunku do 120° . Stąd założenie symetrii napięć generatora w układach rzeczywistych jest niedopuszczalne. Drugi aspekt niesymetrii dotyczy samych prądów i napięć na elementach odbiornika trójfazowego. Nawet przy symetrycznym zasilaniu ale założeniu niesymetrii odbiornika powstaje sytuacja, w której zarówno prądy jak i napięcia na gałęziach obwodu są niesymetryczne. Stąd powstaje potrzeba stworzenia metodyki analizy układów trójfazowych niesymetrycznych, zwłaszcza pod kątem stworzenia miar odkształcenia od symetrii. Takim narzędziem są składowe symetryczne.

Metoda składowych symetrycznych polega na tym, że stosując odpowiednie przekształcenia liniowe zastępuje się układ trzech wektorów trójfazowych niesymetrycznych przez równoważne mu trzy układy trzech wektorów symetrycznych. Niesymetryczne źródło zasilania trójfazowego zostaje zastąpione przez układ trzech źródeł trójfazowych, z których

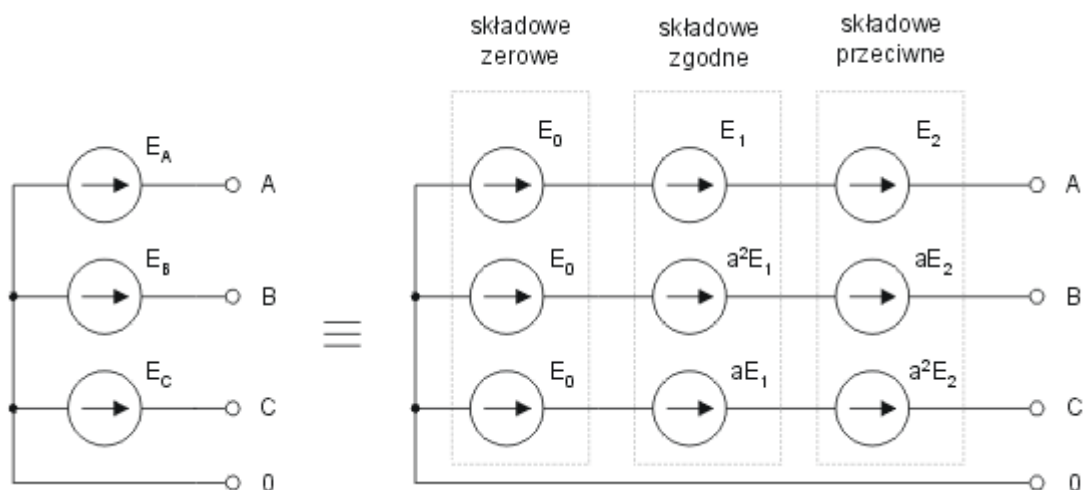
jedno jest o kolejności wirowania zgodnej (kolejność identyczna jak w układach rozważanych dotąd), drugie o kolejności przeciwnej i trzecie o kolejności zerowej (brak przesunięcia między wektorami fazowymi). Ilustracja takiego rozkładu jest przedstawiona na rys. 9.1



Rys. 9.1. Ilustracja metody rozkładu niesymetrycznego układu napięć trójfazowych na sumę trzech układów napięć trójfazowych symetrycznych



Układowi 3 napięć niesymetrycznych trójfazowych przyporządkować można równoważny układ trzech źródeł trójfazowych, reprezentujących składową zerową (brak przesunięcia między napięciami fazowymi), składową zgodną (napięcie fazy B opóźnia się względem fazy A a napięcie fazy C wyprzedza napięcie fazy A) oraz składową przeciwną (napięcie fazy B wyprzedza napięcie fazy A natomiast napięcie fazy C opóźnia się względem napięcia fazy A). Ilustracja takiego przekształcenia pokazana jest na rys. 9.2



Rys. 9.2. Przekształcenie równoważne generatora napięć niesymetrycznych na trzy generatory napięć symetrycznych

Symbolem a oznaczono wektor jednostkowy obrotu o kąt 120°

$$a = e^{j120^\circ} = -0,5 + j \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (9.1)$$

Można łatwo pokazać, że słuszna jest następująca zależność

$$1 + a + a^2 = 0 \quad (9.2)$$

Równoważność obu układów napięć z rys. 9.2 wymaga, aby spełnione były następujące równości

$$E_A = E_0 + E_1 + E_2 \quad (9.3)$$

$$E_B = E_0 + a^2 E_1 + a E_2 \quad (9.4)$$

$$E_C = E_0 + a E_1 + a^2 E_2 \quad (9.5)$$

gdzie E_0 , E_1 , E_2 oznaczają składowe kolejności odpowiednio zerowej, zgodnej i przeciwnej (faza A odpowiedniego układu). Zapis macierzowy powyższej zależności przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} E_A \\ E_B \\ E_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad (9.6)$$

Z zależności tej na podstawie danych wartości rzeczywistych napięć fazowych E_A , E_B , E_C otrzymać można składowe symetryczne E_0 , E_1 , E_2 . Dokonując odwrócenia macierzy w powyższej zależności otrzymuje się

$$\begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_A \\ E_B \\ E_C \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

Identyczny rozkład na składowe symetryczne przypisać można niesymetrycznemu układowi prądów oraz impedancji przez prostą zamianę symbolu E na symbol prądu I oraz impedancji Z . W przypadku prądów rozkład na składowe symetryczne dany jest wzorem

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} \quad (9.8)$$

Zależność opisująca rozkład na składowe symetryczne impedancji jest z kolei następująca

$$\begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_A \\ Z_B \\ Z_C \end{bmatrix} \quad (9.9)$$

Identyczne zależności przyporządkować można wielkościom międzyfazowym. W tym przypadku wskaźniki fazowe A, B, C zastępuje się wskaźnikami międzyfazowymi odpowiednio AB, BC oraz CA. Przykładowo, w przypadku rozkładu napięć międzyfazowych na składowe symetryczne mamy

$$\begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{AB} \\ E_{BC} \\ E_{CA} \end{bmatrix} \quad (9.10)$$

Zależności opisujące rozkład na składowe symetryczne są identyczne dla napięć, prądów i impedancji międzyfazowych. Niezależnie od tego wynik uzyskany z takiego rozkładu różni się znacznie od siebie, szczególnie w przypadku występowania symetrii. Różnice pokażemy na przykładzie.

Przykład 9.1

Dokonać rozkładu na składowe symetryczne układu trójfazowego symetrycznego napięć, gdzie $E_A = E$, $E_B = Ee^{-j120^\circ} = a^2E$, $E_C = Ee^{j120^\circ} = aE$.

Rozwiązanie

Zgodnie z podanymi wcześniej wzorami rozkładu na składowe symetryczne otrzymuje się

$$E_0 = \frac{1}{3}(E_A + E_B + E_C) = \frac{1}{3}E(1 + a + a^2) = 0$$

$$E_1 = \frac{1}{3}(E_A + aE_B + a^2E_C) = \frac{1}{3}E(1 + a^3 + a^3) = E$$

$$E_2 = \frac{1}{3}(E_A + a^2E_B + aE_C) = \frac{1}{3}E(1 + a^4 + a^2) = \frac{1}{3}E(1 + a + a^2) = 0$$

Rozkład na składowe symetryczne układu napięć symetrycznych prowadzi do spodziewanego wyniku. Istnieje jedynie składowa zgodna równa napięciu zasilającemu, pozostałe składowe są zerowe. Zerowanie się składowych zerowej i przeciwnej świadczy o symetrii układu trójfazowego. Taka sytuacja obowiązuje w przypadku zarówno napięć jak i prądów. Dotyczy to wielkości fazowych i międzyfazowych.

Przykład 9.2

Dokonać rozkładu na składowe symetryczne układu trzech impedancji stanowiących obciążenie układu trójfazowego. Przyjmiemy symetrię obciążenia, to znaczy $Z_A=Z$, $Z_B=Z$, $Z_C=Z$.

Rozwiązanie

Stosując identyczne wzory opisujące rozkład impedancji na składowe symetryczne otrzymuje się

$$Z_0 = \frac{1}{3}(Z_A + Z_B + Z_C) = \frac{1}{3}Z(1+1+1) = Z$$

$$Z_1 = \frac{1}{3}(Z_A + aZ_B + a^2Z_C) = \frac{1}{3}Z(1+a+a^2) = 0$$

$$Z_2 = \frac{1}{3}(Z_A + a^2Z_B + aZ_C) = \frac{1}{3}Z(1+a^2+a) = 0$$

Pomimo zastosowania identycznych wzorów wynik rozkładu na składowe symetryczne równych impedancji jest całkowicie różny od rozkładu napięć. Tym razem istnieje wyłącznie składowa zerowa impedancji. Pozostałe składowe symetryczne (zgodna i przeciwna) są równe zeru. Wynik ten jest zrozumiały biorąc pod uwagę, że układ identycznych impedancji stanowi z definicji składową zerową (brak przesunięć fazowych między impedancjami).

9.2. Własności składowych symetrycznych

Składowe symetryczne napięć, prądów i impedancji zdefiniowane wzorami (9.7) – (9.10) mają interesujące własności charakteryzujące niesymetrię wielkości trójfazowych. Podstawowe własności można sformułować następująco.

- W układzie symetrycznym zgodnym napięć (prądów) składowa zerowa i przeciwna znikają, a składowa zgodna jest równa napięciu (prądowi) fazy podstawowej. Dowód powyższej własności przedstawiony został w przykładzie 9.1.
- W układzie symetrycznym przeciwnym napięć (prądów) składowa zerowa i zgodna znikają, a składowa przeciwna jest równa napięciu (prądowi) fazy podstawowej. Dowód

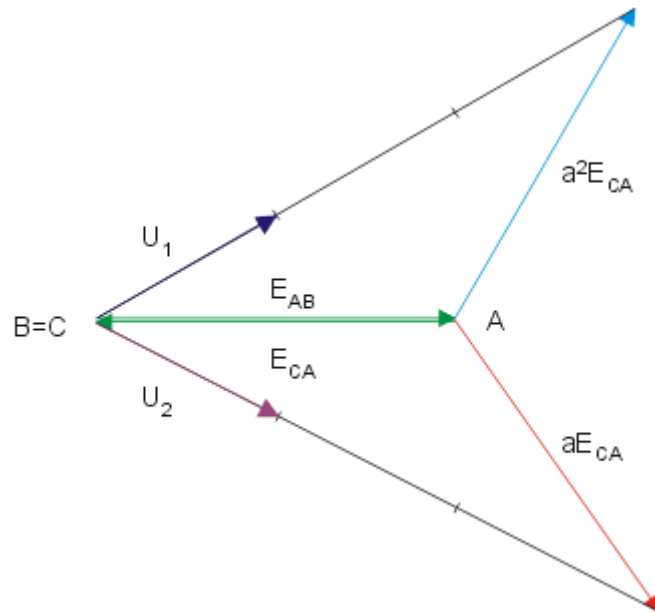
powyższej własności przy prostej zamianie kolejności zgodnej na przeciwną w napięciach oryginalnych wynika z rozważań zawartych w przykładzie 9.1.

- Wystąpienie w rozkładzie na składowe symetryczne napięć lub prądów o kierunku wirowania zgodnym składowej zerowej i przeciwniej świadczy o niesymetrii układu badanych napięć lub prądów.
- W układzie symetrycznym zerowym impedancji (wszystkie trzy impedancje równe sobie) składowa zgodna i przeciwna znikają, a składowa zerowa jest równa impedancji zadanej. Dowód powyższej własności przedstawiony został w przykładzie 9.2
- W układzie trójfazowym trójprzewodowym składowa zerowa prądów liniowych jest równa zero. Wynika to z faktu, że suma prądów liniowych w obwodzie trójprzewodowym jest z definicji równa zero (prąd przewodu zerowego wobec jego braku musi być równy zero), to znaczy $I_A + I_B + I_C = 3I_0 = 0$.
- W układzie trójfazowym czteroprzewodowym prąd w przewodzie zerowym jest równy potrójnej wartości składowej zerowej, $I_N = 3I_0$. Własność ta wynika bezpośrednio z prawa prądowego Kirchhofa, zgodnie z którym $I_N = I_A + I_B + I_C = 3I_0$.
- Składowa symetryczna zerowa układu napięć międzyfazowych jest równa zero. Dowód powyższej własności wynika z faktu, że suma napięć międzyfazowych niezależnie od symetrii jest z definicji równa zero (układ napięć międzyfazowych tworzy trójkąt zamknięty), to znaczy $E_{AB} + E_{BC} + E_{CA} = 3E_0 = 0$.
- Składowa zgodna i przeciwna napięć międzyfazowych w przypadku zerowania się jednego z napięć są sobie równe i równają się napięciu fazowemu układu trójfazowego. Dowód tej własności wynika bezpośrednio z definicji rozkładu. Zauważmy, że przy braku jednego napięcia międzyfazowego dwa pozostałe są sobie równe i przeciwnie skierowane. Jeśli przyjmiemy, że $U_{BC}=0$ oraz $U_{AB}=E_{mf}$, $U_{CA}=-E_{mf}$, gdzie E_{mf} oznacza napięcie międzyprzewodowe to ze wzorów na składowe symetryczne otrzymuje się

$$E_1 = \frac{1}{3}(E_{AB} + aE_{BC} + a^2E_{CA}) = \frac{1}{3}E_{mf}(1 - a^2) = \frac{1}{3}E_{mf}\left(1,5 + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{3}E_{mf}\sqrt{3}e^{j30^\circ} = E_f e^{j30^\circ}$$

$$E_2 = \frac{1}{3}(E_{AB} + a^2E_{BC} + aE_{CA}) = \frac{1}{3}E_{mf}(1 - a) = \frac{1}{3}E_{mf}\left(1,5 - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{3}E_{mf}\sqrt{3}e^{-j30^\circ} = E_f e^{-j30^\circ}$$

Jak z powyższego widać obie składowe rozkładu (zgodna i przeciwna) są równe co do modułu wartości napięcia fazowego E_f i symetrycznie przesunięte względem fazy zerowej o kąt $\pm 30^\circ$. Konstrukcję graficzną składowych symetrycznych dla tego przypadku przedstawiono na rys. 9.3



Rys. 9.3. Konstrukcja graficzna składowych zgodnej i przeciwnej układu napięć międzyprzewodowych przy braku jednego z napięć



- W maszynach elektrycznych składowa zgodna prądów wywołuje pole wirujące zgodnie z kierunkiem prędkości obrotowej maszyny a układ przeciwny prądów - pole wirujące przeciwne do tej prędkości. Duża niesymetria w układzie trójfazowym objawiająca się przewagą składowej przeciwnej może więc spowodować zmianę kierunku wirowania maszyny.
- Składowa przeciwna występująca w maszynie elektrycznej wirującej w kierunku zgodnym indukuje w maszynie prądy o podwójnej częstotliwości. Stąd wywiera ona niekorzystny wpływ na pracę maszyny (zwiększony efekt grzania maszyny).

9.3. Prawo Kirchhoffa dla składowych symetrycznych

Rozkład napięć i impedancji na składowe symetryczne umożliwia bezpośrednie wyznaczenie składowych symetrycznych prądów w obwodzie bez konieczności rozwiązywania obwodu dla wielkości rzeczywistych. Zależności zachodzące między składowymi symetrycznymi napięć, prądów i impedancji wynikają z tak zwanego **prawa Kirchhoffa dla składowych symetrycznych**. Prawo to odnosi się do układu gwiazdowego. Przyjmijmy, że składowe symetryczne odpowiednio napięć fazowych, prądów fazowych i impedancji fazowych oznaczmy w postaci E_0, E_1, E_2 (napięcia), I_0, I_1, I_2 (prądy) oraz Z_0, Z_1, Z_2 (impedancje). Wtedy prawo Kirchhoffa zapiszemy w następującej formie

$$\begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_0 + 3Z_N & Z_2 & Z_1 \\ Z_1 & Z_0 & Z_2 \\ Z_2 & Z_1 & Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (9.11)$$

Przy skończonej impedancji przewodu zerowego wystąpią wszystkie harmoniczne prądów fazowych. Jeśli przewód zerowy nie istnieje ($Z_N = \infty$) wówczas z definicji prąd składowej zerowej jest równy zero i powyższy układ równań redukuje się do rzędu drugiego (równanie pierwsze jako nieokreślone odrzuca się)

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_0 & Z_2 \\ Z_1 & Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (9.12)$$

Należy podkreślić, że równanie Kirchhoffa dla składowych symetrycznych stanowi interesujący z punktu widzenia teoretycznego związek między składowymi symetrycznymi napięć, prądów i impedancji. Jest wygodną formą bezpośredniego wyznaczenia składowych symetrycznych prądu. Nie należy go jednak traktować jako metody wyznaczania rzeczywistych prądów w obwodzie trójfazowym przy niesymetrycznym zasilaniu, gdyż zwykła teoria obwodów trójfazowych (bez rozkładu na składowe symetryczne) znacznie szybciej i prościej prowadzi do wyniku.

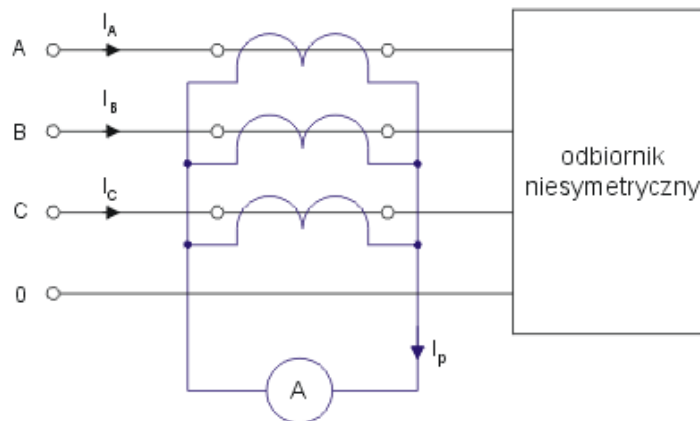
9.4. Filtry składowych symetrycznych

Filtrami składowych symetrycznych nazywamy układy pomiarowe, których zadaniem jest wydzielenie odpowiednich składowych symetrycznych napięcia lub prądu występujących w układzie trójfazowym. Filtry takie pełnią użyteczną rolę w systemie elektroenergetycznym informując o występowaniu niesymetrii wielkości napięć lub prądów w poszczególnych fazach układu trójfazowego.

Rozróżniamy **filtry składowej zerowej, przeciwnej i zgodnej**. Najłatwiejsze w budowie są filtry składowej zerowej prądu i napięcia. Wynika to z faktu, że składowa zerowa stanowi jedną trzecią sumy mierzonych napięć lub prądów niesymetrycznych. Urządzenie filtrujące musi zatem mierzyć sumę odpowiednich wielkości i być przeskalowane w stosunku 1:3. Spośród wielu istniejących rozwiązań filtrów przedstawimy tu 3 wybrane rozwiązania prezentujące filtr składowej zerowej prądów liniowych, filtr składowej zerowej napięć fazowych oraz filtr składowej zgodnej i przeciwnej prądów liniowych.

9.4.1. Filtr składowej zerowej prądów liniowych

W obwodzie trójfazowym czteroprzewodowym (tylko w takim układzie składowa zerowa może być różna od zera) włączenie amperomierza bezpośrednio do przewodu zerowego pozwoliłoby zmierzyć sumę prądów liniowych, czyli również składową zerową tych prądów. Taki sposób nie jest jednak stosowany ze względu na to, że wymagałby ingerencji w pracujący system. W zamian stosuje się metody nieinwazyjne polegające na zastosowaniu przekładników prądowych, których włączenie do sieci nie wymaga żadnych przełączeń w obwodzie głównym. Przekładnik prądowy transformuje prąd pierwotny na prąd wtórny proporcjonalny do prądu pierwotnego ze współczynnikiem proporcjonalności k . Jeśli prąd pierwotny przekładnika jest równy I_1 to prąd I_2 płynący po stronie wtórnej przekładnika jest równy $I_2 = kI_1$. Schemat układu filtru składowej zerowej prądów liniowych przedstawiony jest na rys. 9.4.



Rys. 9.4. Układ filtru składowej symetrycznej zerowej prądów liniowych

Jak łatwo pokazać uzwojenia wtórne przekładników tworzą połączenie równoległe a prąd płynący przez miernik jest równy sumie prądów liniowych przeskalowanych przez przekładnię k przekładnika. W związku z powyższym wskazanie przyrządu jest równe

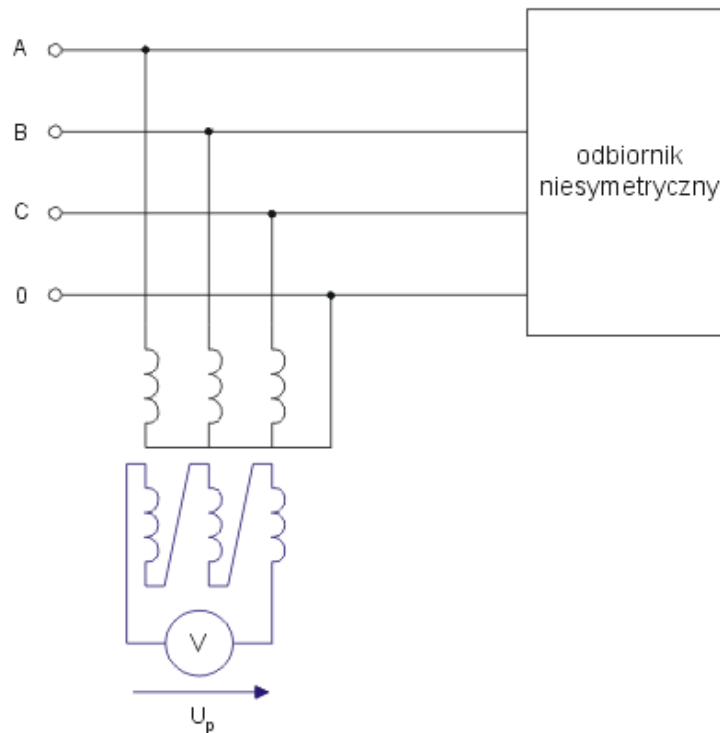
$$I_p = k(I_A + I_B + I_C) = 3kI_0 \quad (9.13)$$

$$I_0 = \frac{I_p}{3k} \quad (9.14)$$

Zwykle przeskalowanie przyrządu pomiarowego prądu I_p pozwala na uzyskanie wskazania równego składowej zerowej prądów liniowych.

9.4.2. Filtr składowej zerowej napięć fazowych

Filtr składowej zerowej napięć fazowych (rys. 9.5) wykorzystuje również przekładniki, tym razem napięciowe, przetwarzające napięcie pierwotne na napięcie wtórne zgodnie z relacją $U_2 = kU_1$, gdzie k jest przekładnią przekładnika. Dzięki zastosowaniu przekładnika możliwe jest obniżenie napięć pierwotnych do poziomu niskiego a jednocześnie galwaniczne odizolowanie toru pomiarowego od obwodu głównego.



Rys. 9.5 Filtr składowej zerowej napięć fazowych

Woltomierz pomiarowy włączony jest na sumę napięć wtórnych przekładnika. Suma napięć składowej zgodnej i przeciwnej jest równa zero ze względu na ich symetrię. Pozostaje jedynie wskazanie od składowej zerowej. Woltomierz mierząc sumę napięć

$$U_p = (U_A + U_B + U_C)k \quad (9.15)$$

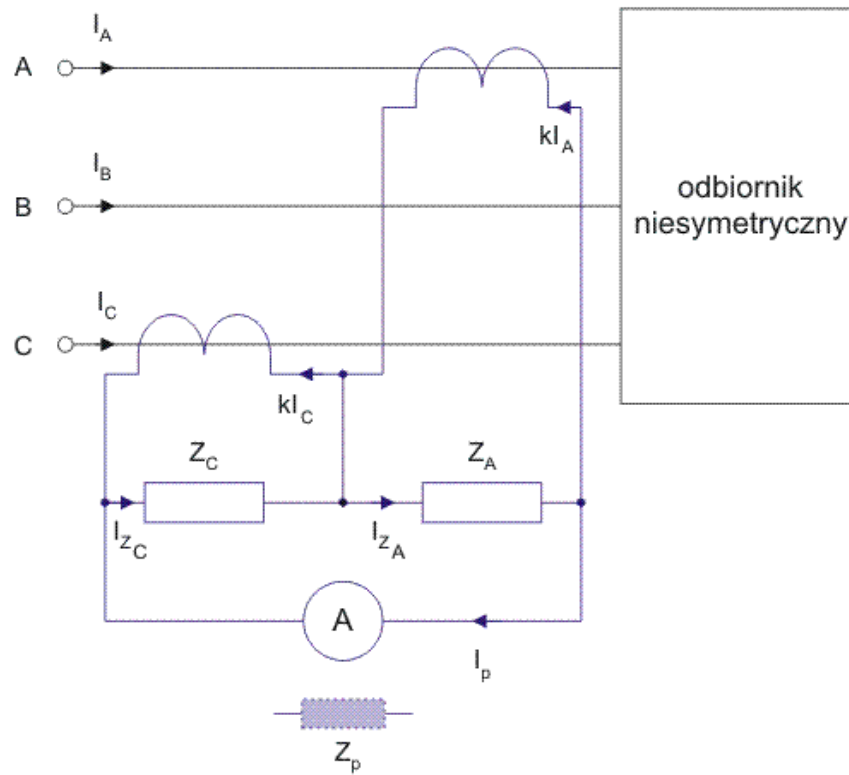
mierzy jednocześnie składową zerową, gdyż składowa zerowa jest równa 1/3 tej sumy. W związku z tym składowa zerowa napięć fazowych jest proporcjonalna do wskazania woltomierza, to jest

$$U_0 = \frac{1}{3k} U_p \quad (9.16)$$

9.4.3. Filtr składowej zgodnej i przeciwnej prądów liniowych

Spośród wielu istniejących rozwiązań filtru składowych zgodnych i przeciwnych prądu omówimy układ uniwersalny, który w zależności od doboru parametrów może pełnić rolę

bądź filtru składowej zgodnej bądź przeciwnej. Schemat układu filtru przedstawiony jest na rys. 9.6.



Rys. 9.6 Schemat filtru składowej zgodnej i przeciwnej prądów liniowych

W filtrze zastosowane są również przekładniki prądowe. Załóżmy, że uwzględniamy impedancję Z_p amperomierza pomiarowego. Dodatkowym założeniem jest zasilanie trójprzewodowe odbiornika trójfazowego, dla którego słuszna jest relacja $I_A + I_B + I_C = 0$. Na podstawie prawa napięciowego Kirchhoffa dla oczka zaznaczonego na rysunku możemy napisać

$$Z_A I_{ZA} + Z_C I_{ZC} + Z_p I_p = 0 \quad (9.17)$$

Prądy I_{ZA} oraz I_{ZC} można wyznaczyć z prądowego prawa Kirchhoffa jako

$$I_{ZA} = k I_A + I_p \quad (9.18)$$

$$I_{ZC} = k I_C + I_p \quad (9.19)$$

Podstawiając powyższe zależności do napięciowego prawa Kirchhoffa otrzymuje się

$$I_p = -k \frac{Z_A I_A + Z_C I_C}{Z_A + Z_C + Z_p} \quad (9.20)$$

Prądy przewodowe podlegające rozkładowi na składowe symetryczne, wobec zerowania się składowej zerowej, można zapisać w postaci

$$I_A = I_1 + I_2 \quad (9.21)$$

$$I_C = aI_1 + a^2 I_2 \quad (9.22)$$

Po podstawieniu tych wyrażen do wzoru na prąd I_p otrzymuje się

$$I_p = -k \frac{I_1(Z_A + aZ_C) + I_2(Z_A + a^2 Z_C)}{Z_A + Z_C + Z_p} \quad (9.23)$$

Wzór powyższy wskazuje na to, że prąd pomiarowy przy odpowiednim doborze impedancji może być proporcjonalny zarówno do składowej zgodnej jak i przeciwnej. Jeśli chcemy mierzyć składową zgodną prądów, należy wyzerować czynnik stojący przy prądzie składowej przeciwnej, to jest

$$Z_A + a^2 Z_C = 0 \quad (9.24)$$

Wystarczy w tym celu dobrać impedancje w taki sposób, aby

$$Z_A = -a^2 Z_C = \left(0,5 + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) Z_C \quad (9.25)$$

Istnieje wiele rozwiązań tego równania. Wystarczy przyjąć na przykład

$$Z_C = R \quad (9.26)$$

$$Z_A = \frac{R}{2} + j\sqrt{3}\frac{R}{2} \quad (9.27)$$

Oznacza to, że przy wyborze impedancji Z_A i Z_C określonych powyższymi wzorami (impedancja Z_C jest rezystancją a impedancja Z_A połączeniem szeregowym rezystancji $R/2$ i indukcyjności o reaktancji $X_L = \sqrt{3}\frac{R}{2}$) amperomierz wskaże prąd proporcjonalny do składowej zgodnej prądów liniowych, przy czym

$$I_p = -\frac{\frac{R}{2} + j\sqrt{3}\frac{R}{2} - \frac{R}{2} + j\sqrt{3}\frac{R}{2}}{\frac{R}{2} + j\sqrt{3}\frac{R}{2} + R + Z_p} kI_1 \quad (9.28)$$

Po uproszczeniu wzoru otrzymuje się

$$I_p = -\frac{j\sqrt{3}R}{R\sqrt{3}e^{j\pi/6} + Z_p} kI_1 \quad (9.29)$$

Jeśli zaniedbamy impedancję wewnętrzną amperomierza pomiarowego otrzymamy

$$I_p = kI_1 e^{j\pi/3} \quad (9.30)$$

Wskazanie amperomierza występującego w filtrze (moduł mierzonego prądu) jest więc równe składowej zgodnej prądów liniowych układu, z uwzględnieniem przekładni k przekładnika prądowego.

W analogiczny sposób można otrzymać filtr składowej przeciwnej prądów. W tym celu należy wyzerować czynnik przy składowej zgodnej prądów we wzorze (9.23), czyli

$$Z_A + aZ_C = 0 \quad (9.31)$$

Warunek ten może być spełniony przy wyborze

$$Z_C = R \quad (9.32)$$

$$Z_A = -aZ_C = \frac{R}{2} - j\sqrt{3}\frac{R}{2} \quad (9.33)$$

Oznacza to, że dla uzyskania filtru składowej przeciwnej należy wybrać impedancję Z_C równą rezystancji R natomiast Z_A będącą połączeniem szeregowym rezystancji $R/2$ oraz reaktancji pojemnościowej $X_C = \sqrt{3}\frac{R}{2}$. Prąd mierzony przez amperomierz będzie teraz równy

$$I_p = -\frac{\frac{R}{2} - j\sqrt{3}\frac{R}{2} - \frac{R}{2} - j\sqrt{3}\frac{R}{2}}{\frac{R}{2} - j\sqrt{3}\frac{R}{2} + R + Z_p} kI_2 \quad (9.34)$$

Po uproszczeniu wzoru otrzymuje się

$$I_p = -\frac{-j\sqrt{3}R}{R\sqrt{3}e^{-j\pi/6} + Z_p} kI_2 \quad (9.35)$$

Jeśli zaniedbamy impedancję wewnętrzną amperomierza pomiarowego otrzymamy

$$I_p = kI_2 e^{j2\pi/3} \quad (9.36)$$

Wskazanie amperomierza filtru (moduł wartości skutecznej zespolonej) jest więc równe składowej przeciwnej prądów liniowych układu, z uwzględnieniem przekładni k przekładnika prądowego.

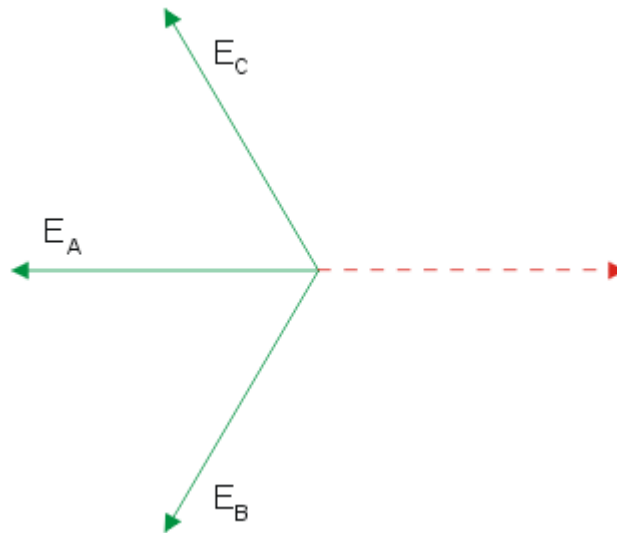
Zadania sprawdzające

Zadanie 9.1

W symetrycznym układzie trójfazowego generatora zamieniono końcówki fazy A. Wyznaczyć rozkład na składowe symetryczne układu napięć fazowych takiego generatora, jeśli $|E_f| = 1000V$.

Rozwiązanie

Po uwzględnieniu błędnego połączenia napięcia fazy A rozkład napięć fazowych przedstawiony jest na rys. 9.7



Rys. 9.7. Wykres wektorowy napięć generatora trójfazowego z zadania 9.1

Wartości skuteczne zespolone napięć fazowych są równe:

$$E_A = -1000$$

$$E_B = 1000e^{-j120^\circ}$$

$$E_C = 1000e^{j120^\circ}$$

Składowe symetryczne napięć równają się

$$E_0 = \frac{1}{3}(E_A + E_B + E_C) = -666,67$$

$$E_1 = \frac{1}{3}(E_A + aE_B + a^2E_C) = 333,33$$

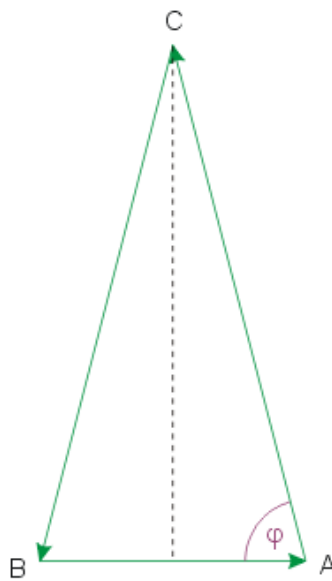
$$E_2 = \frac{1}{3}(E_A + a^2E_B + aE_C) = -666,67$$

Zadanie 9.2

Zmierzono następujące wartości napięć liniowych (międzyfazowych) w układzie trójfazowym: $|U_{AB}| = 200\text{V}$, $|U_{BC}| = 400\text{V}$, $|U_{CA}| = 400\text{V}$. Wyznaczyć składowe symetryczne tych napięć.

Rozwiązanie

Na rys. 9.8 przedstawiono trójkąt napięć międzyfazowych z napięciem U_{AB} jako podstawą.



Rys. 9.8 Trójkąt napięć międzyfazowych do zadania 9.2

Dla wyznaczenia wartości skutecznych zespolonych tych napięć należy wyznaczyć kąt φ zaznaczony na rysunku. Z podstawowych zależności geometrycznych wynika, że

$$\varphi = \arccos\left(\frac{100}{400}\right) = 75,5^\circ$$

Wartości skuteczne zespolone napięć liniowych są więc równe

$$U_{AB} = 200$$

$$U_{BC} = 400e^{-j104,5^\circ}$$

$$U_{CA} = 400e^{j104,5^\circ}$$

Składowa zerowa napięć liniowych jest równa zero, gdyż układ tych napięć tworzy trójkąt zamknięty.

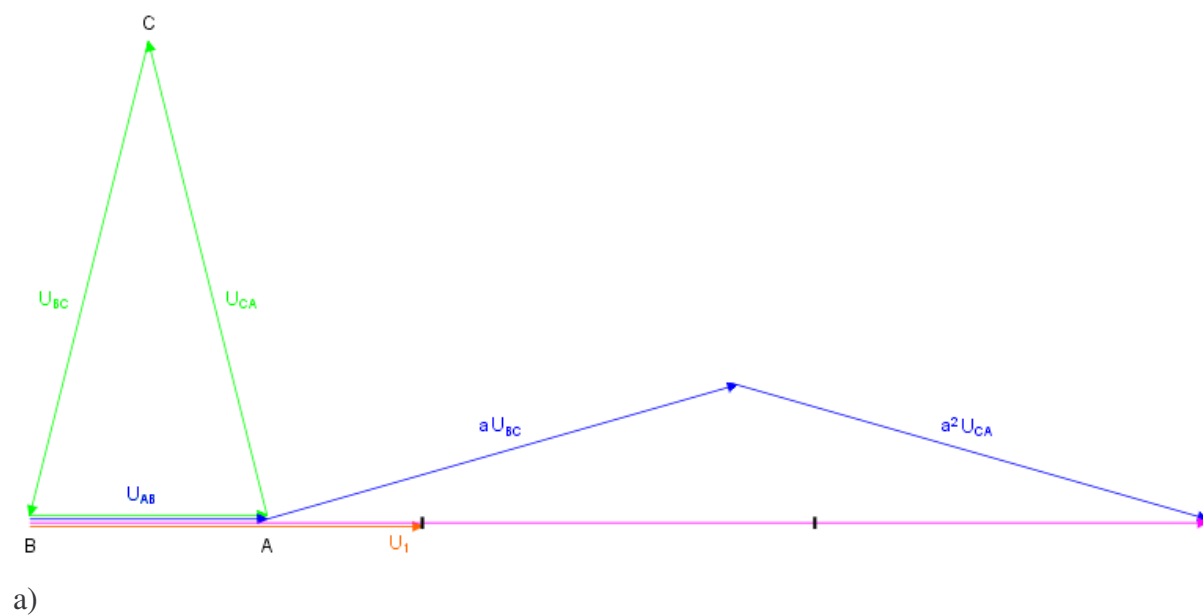
$$U_0 = \frac{1}{3}(U_{AB} + U_{BC} + U_{CA}) = 0$$

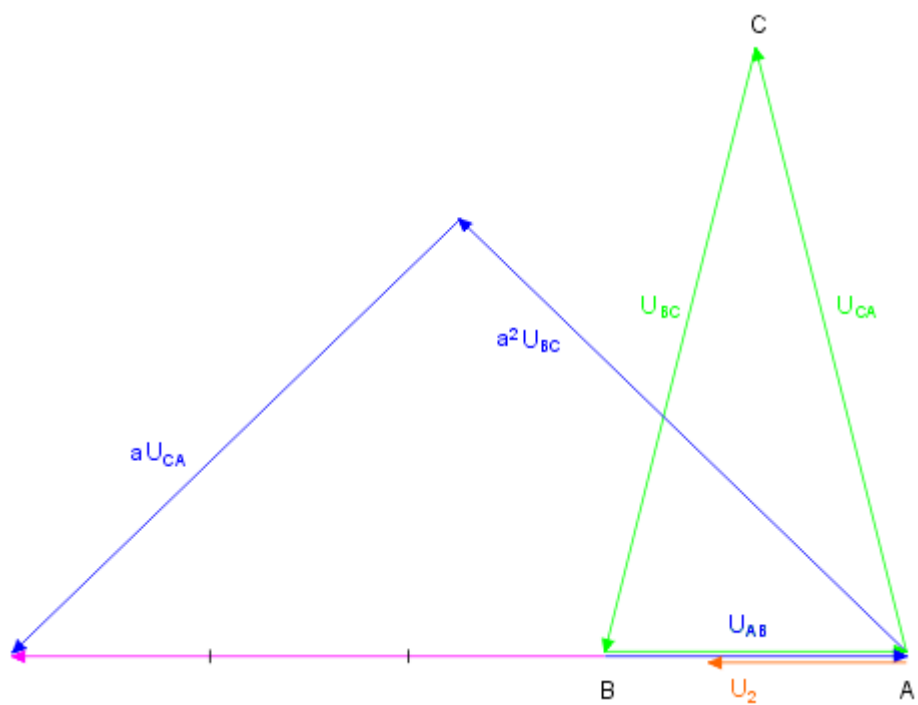
Składowe symetryczne zgodna i przeciwna napięć liniowych równają się

$$U_1 = \frac{1}{3}(U_{AB} + aU_{BC} + a^2U_{CA}) = 323,63$$

$$U_2 = \frac{1}{3}(U_A + a^2U_B + aU_C) = -123,53$$

Rys. 9.9 przedstawia konstrukcję graficzną składowych zgodnej i przeciwniej napięć liniowych.





b)

Rys. 9.9. Konstrukcja graficzna składowych symetrycznych: a) zgodnej,
b) przeciwnej napięć liniowych



Lekcja 10. Metoda równań różniczkowych w analizie stanów nieustalonych w obwodach

Wstęp

W wyniku przełączeń lub zmiany wartości parametrów obwodu RLC powstaje w nim stan nieustalony, charakteryzujący się tym, że kształt odpowiedzi obwodu jest inny niż wymuszenia. Na przykład przy stałym wymuszeniu odpowiedź jest zmienna wykładniczo, bądź sinusoidalnie. Z upływem czasu odpowiedzi tego typu zanikają i ich charakter znów odpowiada charakterowi wymuszenia. Z czasem powstaje więc nowy stan ustalony w obwodzie o zmienionej strukturze na skutek przełączenia. W stanie nieustalonym obwodu można zaobserwować interesujące zjawiska, które odgrywają ogromną rolę w praktyce. Analiza tych zjawisk pozwala z jednej strony uniknąć pewnych niebezpieczeństw związanych z przepięciami, które mogą wystąpić w obwodzie a z drugiej strony wykorzystać te zjawiska do generacji przebiegów zmiennych w czasie (np. generatory napięć harmoniczných).

W tej lekcji zaprezentowane zostaną podstawowe metody opisu obwodów RLC w stanie nieustalonym przy zastosowaniu równań różniczkowych. Wprowadzona zostanie metoda równań stanu oraz tak zwana metoda klasyczna. Równania stanu są zbiorem wielu równań różniczkowych pierwszego rzędu zapisanych w postaci jednego równania macierzowego $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$. Zmiennymi stanu tworzącymi wektor $\mathbf{x}$ są napięcia kondensatorów i prądy cewek, dla których obowiązują tak zwane prawa komutacji, pozwalające na wyznaczenie warunków początkowych w obwodzie.

W metodzie klasycznej zbiór równań różniczkowych pierwszego rzędu zostaje zastąpiony jednym równaniem różniczkowym wyższego rzędu względem jednej zmiennej stanu. Wprowadzone zostanie pojęcie równania charakterystycznego oraz biegunów układu, decydujących o charakterze rozwiązania obwodu w stanie nieustalonym.



10.1 Podstawowe pojęcia stanów nieustalonych

Analizując przebiegi czasowe procesów zachodzących w obwodach elektrycznych należy wyróżnić dwa stany:

- **stan ustalony** charakteryzujący się tym, że postać odpowiedzi jest identyczna z postacią wymuszenia (na przykład w odpowiedzi na wymuszenie sinusoidalne odpowiedź ustalona jest również sinusoidalna o tej samej częstotliwości choć innej fazie początkowej i innej amplitudzie)
- **stan przejściowy**, w którym przebiegi czasowe odpowiedzi mają inny charakter niż wymuszenie (na przykład w odpowiedzi na wymuszenie stałe odpowiedź obwodu jest wykładniczo malejąca czy oscylacyjna).

Stan nieustalony w obwodzie RLC powstaje jako nałożenie się stanu przejściowego (zwykle zanikający) i stanu ustalonego przy zmianie stanu obwodu spowodowanego przełączeniem. Może on wystąpić w wyniku przełączeń w samym obwodzie pasywnym (zmiana wartości elementów, zwarcie elementu, wyłączenie elementu) lub w wyniku zmiany sygnałów wymuszających (parametrów źródeł napięciowych i prądowych, w tym także załączeniem lub wyłączeniem źródła). Dowolną zmianę w obwodzie nazywać będziemy **komutacją**. Zakładać będziemy, że czas trwania komutacji jest równy zeru, co znaczy że wszystkie przełączenia odbywają się bezzwłocznie.

W obwodach elektrycznych proces komutacji modeluje się zwykle przy pomocy wyłączników i przełączników wskazujących na rodzaj przełączenia. Chwilę czasową poprzedzającą bezpośrednio komutację oznaczać będziemy w ogólności przez t_0^- (w szczególności przez 0^-), natomiast chwilę bezpośrednio następującą po komutacji przez t_0^+ (w szczególności przez 0^+), gdzie t_0 jest chwilą przełączenia (komutacji).

10.2 Prawa komutacji

10.2.1 Własności energetyczne cewki i kondensatora

Przejście z jednego stanu ustalonego do drugiego, powstającego na skutek komutacji, musi uwzględnić zasadę zachowania energii. Odnosi się ona do elementów gromadzących energię elektryczną, w tym do kondensatora i cewki. Powstanie stanów nieustalonych w obwodzie jest więc ściśle związane z właściwościami gromadzenia energii w elementach

reaktancyjnych obwodu (cewce i kondensatorze). Wartość energii nagromadzonej w polu magnetycznym cewki o strumieniu Ψ oraz prądzie i_L jest opisana wzorem

$$W_L = \frac{1}{2} \Psi i_L \quad (10.1)$$

Przy założeniu, że wartość indukcyjności L cewki pozostaje niezmienną w wyniku przełączenia, wobec $\Psi = Li_L$ wzór na energię cewki może być uproszczony do postaci

$$W_L = \frac{1}{2} Li_L^2 \quad (10.2)$$

Podobnie wartość energii nagromadzonej w polu elektrycznym kondensatora zawierającego ładunek q i naładowanego do napięcia u_C wynosi

$$W_C = \frac{1}{2} qu_C \quad (10.3)$$

Przy założeniu, że wartość pojemności C kondensatora pozostaje niezmienną w wyniku przełączenia i wobec $q = Cu_C$ wzór na energię kondensatora może być uproszczony do postaci

$$W_C = \frac{1}{2} Cu_C^2 \quad (10.4)$$

Z zasady zachowania energii wynika, że energia cewki i kondensatora nie może zmieniać swojej wartości w sposób skokowy. Z zasady ciągłości energii w obwodzie wynikają tzw. prawa komutacji, które mówią o ciągłości strumienia i prądu w cewce oraz o ciągłości ładunku i napięcia na kondensatorze. Prawo dotyczące cewki nazywać będziemy pierwszym prawem, a dotyczące kondensatora – drugim prawem komutacji.

10.2.2 Pierwsze prawo komutacji

Strumień skojarzony cewki nie może ulec skokowej zmianie na skutek przełączenia w obwodzie, co oznacza, że strumień ten w chwili tuż przed komutacją jest równy strumieniowi

w chwili tuż po komutacji, co można zapisać w postaci (w równaniu przyjęto, że komutacja zachodzi w chwili $t_0=0$)

$$\Psi(0^-) = \Psi(0^+) \quad (10.5)$$

Uwzględniając, że strumień skojarzony z cewką jest równy $\Psi = Li_L$, przy niezmienionej wartości indukcyjności pierwsze prawo komutacji można również zapisać w postaci

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) \quad (10.6)$$

Jest to najczęściej w praktyce używana postać pierwszego prawa komutacji w odniesieniu do cewki.

10.2.3 Drugie prawo komutacji

Ładunek zgromadzony na kondensatorze nie może zmienić się w sposób skokowy na skutek komutacji, co oznacza, że ładunek ten w chwili tuż przed komutacją jest równy ładunkowi w chwili tuż po komutacji, co można zapisać w postaci

$$q(0^-) = q(0^+) \quad (10.7)$$

Uwzględniając, że ładunek zgromadzony na kondensatorze jest równy $q = Cu_C$, przy niezmienionej wartości pojemności kondensatora, drugie prawo komutacji można również zapisać w postaci

$$u_C(0^-) = u_C(0^+) \quad (10.8)$$

Ostatnia postać prawa komutacji dotycząca napięcia na kondensatorze jest najczęściej używana w praktyce.

Należy zaznaczyć, że prawa komutacji dotyczą wyłącznie prądu (strumienia) cewki i napięcia (ładunku) kondensatora. Inne wielkości związane z tymi elementami (prąd kondensatora, napięcie cewki) jak również prąd i napięcie na rezystorze nie są związane bezpośrednio zależnościami energetycznymi i mogą zmieniać się w sposób skokowy podczas

komutacji. Wartości jakie przybierają tuż po komutacji wynikają bądź z praw Kirchhoffa bądź z prawa Ohma.

Przy założeniu, że chwilę komutacji uważać będziemy za chwilę początkową analizy obwodu w stanie nieustalonym ($t_0 = 0$) istotnym problemem w analizie obwodu jest wyznaczenie warunków początkowych procesu, czyli wartości napięć na kondensatorach i prądów cewek w chwili przełączenia (u nas $i_L(0^-)$ oraz $u_C(0^-)$). Zwykle przyjmuje się, że przełączenie następuje ze stanu ustalonego obwodu. Warunki początkowe wynikają wówczas z wartości ustalonych tych wielkości w chwili tuż przed przełączeniem $t_0 = 0^-$. Warunki początkowe mogą być przy tym zerowe, jeśli prądy wszystkich cewek i napięcia wszystkich kondensatorów w chwili przełączenia miały wartości zerowe. Znajomość warunków początkowych w obwodzie jest niezbędna przy wyznaczaniu rozwiązania obwodu w stanie nieustalonym.

Wyznaczenie stanu początkowego napięcia kondensatora i prądu cewki w obwodzie sprowadza się do

- rozwiązania stanu ustalonego obwodu przed przełączeniem (przy wymuszeniach sinusoidalnych metodą symboliczną),
- określenia postaci czasowej tego rozwiązania dla prądu cewki $i_L(t)$ i napięcia kondensatora $u_C(t)$ oraz
- wyznaczenia wartości tego rozwiązania odpowiadającego chwili czasowej przełączenia (u nas $i_L(0^-)$ oraz $u_C(0^-)$).

10.3 Opis stanowy obwodu RLC

Wykorzystując opis ogólny elementów RLC oraz prawa Kirchhoffa łatwo pokazać, że liniowe obwody elektryczne RLC w stanach nieustalonych mogą być opisane przez równania różniczkowe i całkowe. Porządkując te równania i eliminując zmienne nie będące prądami cewek i napięciami kondensatorów można uzyskać tak zwaną postać kanoniczną opisu w postaci układu równań różniczkowych, który można przedstawić następująco

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\
&\dots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + f_n(t)
\end{aligned} \tag{10.9}$$

Zmienne $x_1, x_2, \dots, x_n$ występujące w równaniach oznaczają prądy cewek lub napięcia kondensatorów (tzw. **zmienne stanu**). W opisie obwodu operuje się zwykle minimalnym zbiorem zmiennych stanu, które są niezbędne dla wyznaczenia pozostałych wielkości w obwodzie. Liczba zmiennych stanu n zależy od liczby reaktancji w obwodzie i jest najczęściej równa (w szczególnych przypadkach mniejsza) sumie liczby kondensatorów i cewek włączonych w obwodzie. Stałe współczynniki a_{ij} występujące w równaniu (10.9) stanowią kombinację wartości parametrów R, L, C, M elementów pasywnych obwodu oraz parametrów źródeł sterowanych. Funkcje czasu $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ związane są z wymuszeniami napięciowymi i prądowymi w obwodzie. Przedstawiony powyżej układ równań można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \tag{10.10}$$

W przypadku obwodów liniowych funkcje $f_i(t)$ występujące po prawej stronie wzoru są liniowymi funkcjami wymuszeń prądowych i napięciowych. Oznaczając wymuszenia prądowe bądź napięciowe w ogólności przez u_i można te funkcje zapisać przy pomocy zależności macierzowej

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix} \tag{10.11}$$

Jeśli macierz zawierającą elementy a_{ij} oznaczmy jako $\mathbf{A}$, macierz o elementach b_{ij} jako macierz $\mathbf{B}$, wektory zawierające zmienne stanu przez $\mathbf{x}$ a wartości wymuszeń przez $\mathbf{u}$, to równanie stanu opisujące obwód elektryczny można przedstawić w postaci

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (10.12)$$

Jest to ogólna postać opisu stanowego obwodu liniowego RLC. Reprezentuje ona układ n równań różniczkowych liniowych rzędu pierwszego. Elementy macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ zależą wyłącznie od wartości parametrów obwodu. Elementy wektora $\mathbf{u}$ stanowią źródła niezależne prądu i napięcia w obwodzie. Zmienne stanu to niezależne napięcia na kondensatorach i prądy cewek.

10.4. Rozwiązanie stanów nieustalonych w obwodach metodą zmiennych stanu

10.4.1 Rozwiązanie ogólne

Jak zostało pokazane w punkcie poprzednim układ równań różniczkowych opisujących obwód elektryczny może być przedstawiony w postaci macierzowego równania stanu (10.12). Jeśli założymy, że wektor stanu $\mathbf{x}(t)$ jest n -wymiarowy a wektor wymuszeń $\mathbf{u}(t)$ m -wymiarowy, to macierz stanu $\mathbf{A}$ ma wymiar $n \times n$, a macierz $\mathbf{B}$ $n \times m$. Równanie (10.12) nazywane jest macierzowym równaniem stanu obwodu elektrycznego. Rozwiązanie tego równania pozwala wyznaczyć przebieg czasowy zmiennych stanu tworzących wektor $\mathbf{x}(t)$. Jeśli dodatkowo interesują nas inne zmienne w obwodzie, na przykład prądy i napięcia rezystorów, prądy kondensatorów czy napięcia na cewkach to należy sformułować drugie równanie, tzw. równanie odpowiedzi $\mathbf{y}(t)$, które uzależnia poszukiwane wartości od zmiennych stanu i wymuszeń. Równanie to zapiszemy w postaci

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (10.13)$$

Równania (10.12) i (10.13) tworzą parę równań stanu

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (10.14)$$

która w pełni opisuje stan obwodu przy założeniu, że znane są warunki początkowe $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$, gdzie t_0 oznacza chwilę przełączenia. W przypadku ogólnym rozwiązanie równania stanu przyjmuje postać

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (10.15)$$

Zależność powyższa stanowi rozwiązanie ogólne, które dla konkretnych wartości funkcji wymuszających zadanych wektorem $\mathbf{u}$ wyznacza rozwiązanie czasowe dla zmiennych stanu. We współczesnych metodach numerycznych równania stanu stanowią punkt wyjścia w określaniu dokładnego rozwiązania równań liniowych lub przybliżonego dla zlinearyzowanych równań stanu. Są one również bardzo wygodne w zastosowaniach przybliżonych metod całkowania równań różniczkowych ze względu na to, że wszystkie równania stanu są rzędu pierwszego, dla których istnieją wyspecjalizowane metody całkowania przybliżonego.

W rozwiązaniu (10.15) równania stanu występują dwa człony, z których pierwszy jest zależny tylko od warunków początkowych niezerowych (energii zgromadzonej w cewkach i kondensatorach), a drugi stanowi odpowiedź obwodu na wymuszenia tworzące wektor $\mathbf{u}(t)$. Pierwszą część nazywać będziemy składową przejściową, a drugą – składową wymuszoną (ustaloną). Zależność (10.15) może więc być przedstawiona w postaci

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{x}_u(t) \quad (10.16)$$

W praktyce obliczenie składowej ustalonej według zależności (10.15), zwłaszcza przy wymuszeniu sinusoidalnym, jest niezwykle uciążliwe, gdyż wymaga całkowania złożonych funkcji macierzowych. W zamian można wykorzystać fakt, że stan nieustalony jest superpozycją stanu ustalonego i przejściowego, i w rozwiązaniu stanu ustalonego zastosować metodę symboliczną analizy obwodów, która pozwala wyznaczyć rozwiązanie w stanie ustalonym bez operacji całkowania (patrz lekcja 4). W ten sposób stan nieustalony rozbity zostaje na dwa niezależne od siebie stany: stan ustalony (składowa $\mathbf{x}_u(t)$), pochodzący od niezależnych wymuszeń, wyznaczany metodą symboliczną oraz stan przejściowy (składowa $\mathbf{x}_p(t)$), w którym te wymuszenia nie występują (źródła napięciowe zwarte a prądowe

rozwarze). Zauważmy, że przy braku wymuszenia ($\mathbf{u}=0$) obwód dla składowej przejściowej opisuje się prostszym równaniem stanu

$$\frac{d\mathbf{x}_p(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}_p(t) \quad (10.17)$$

którego rozwiązanie nie wymaga całkowania funkcji i dane jest w postaci

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}_p(t_0^+) \quad (10.18)$$

Jeśli dodatkowo przyjmiemy, że chwila przełączenia t_0 oznacza początek liczenia czasu ($t_0=0$) to w naszym podejściu $\mathbf{x}_p(t_0^+)=\mathbf{x}_p(0^+)$. Zauważmy, że wartości początkowe w obwodzie dotyczą chwili tuż po przełączeniu, oznaczanej zwykle symbolem 0^+ . Przy rozbiciu stanu nieustalonego na dwie składowe wymagane jest więc wyznaczenie wartości $\mathbf{x}_p(0^+)$ dla składowej przejściowej. Można tego dokonać korzystając z praw komutacji, które tutaj przepiszemy w postaci

$$\mathbf{x}(0^-) = \mathbf{x}(0^+) = \mathbf{x}_u(0^+) + \mathbf{x}_p(0^+) \quad (10.19)$$

Przy znanych wartościach $\mathbf{x}(0^-)$ oraz $\mathbf{x}_u(0^+)$ z zależności (10.19) można wyznaczyć wartość $\mathbf{x}_p(0^+)$, jako

$$\mathbf{x}_p(0^+) = \mathbf{x}(0^-) - \mathbf{x}_u(0^+) \quad (10.20)$$

W tej sytuacji rozwiązanie równania stanu (10.17) można przedstawić w postaci

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_p(0^+) \quad (10.21)$$

w której wartość $\mathbf{x}_p(0^+)$ jest określona zależnością (10.20). Do określenia rozwiązania w stanie przejściowym należy wyznaczyć jeszcze macierz $e^{\mathbf{A}t}$, w której wykładnik jest macierzą a nie skalar. Dla obliczenia $e^{\mathbf{A}t}$ należy w pierwszej kolejności obliczyć wartości własne macierzy stanu $\mathbf{A}$.

10.4.2 Wartości własne i wektory własne macierzy kwadratowej

Założmy, że $\mathbf{A}$ jest macierzą kwadratową stopnia n . Macierz $(s\mathbf{1}-\mathbf{A})$ nazywana jest macierzą charakterystyczną $\mathbf{A}$, przy czym $\mathbf{1}$ oznacza macierz jednostkową stopnia n , to jest macierz diagonalną $\mathbf{1}=\text{diag}(1, 1, \dots, 1)$. Wyznacznik macierzy charakterystycznej $\det(s\mathbf{1}-\mathbf{A})$ nazywamy **wielomianem charakterystycznym** macierzy, a równanie

$$\det(s\mathbf{1}-\mathbf{A})=0 \quad (10.22)$$

nazywamy **równaniem charakterystycznym** macierzy $\mathbf{A}$. Równanie to po rozwinięciu wyrażenia wyznacznika przyjmuje postać wielomianu n -tego stopnia

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0 \quad (10.23)$$

Pierwiastki tego równania $s_1, s_2, \dots, s_n$ nazywamy **wartościami własnymi** macierzy $\mathbf{A}$. Mogą one przyjmować wartości rzeczywiste lub zespolone, pojedyncze lub wielokrotne. Z każdą wartością własną s_i skojarzony jest **wektor własny** $\mathbf{x}_i$ o niezerowej wartości i wymiarze n , spełniający równanie

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = s_i\mathbf{x}_i \quad (10.24)$$

Jeśli wszystkie wartości własne są różne to na podstawie równania (10.24) można napisać n równań liniowych o postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x}_1 &= s_1\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_2 &= s_2\mathbf{x}_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_n &= s_n\mathbf{x}_n \end{aligned} \quad (10.25)$$

z rozwiązania których można wyznaczyć wszystkie wektory własne $\mathbf{x}_i$.

Przykład 10.1

Dla macierzy stanu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

wyznaczyć wartości i wektory własne

Rozwiązanie

Równanie charakterystyczne

$$\det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}) = \det\left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\right) = s^2 + 5s + 4 = 0$$

Pierwiastki tego równania będące wartościami własnymi $\mathbf{A}$ są równe $s_1 = -4$ oraz $s_2 = -1$.

Wektory własne spełniają relację (10.25), która w naszym przypadku przyjmie postać

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}$$

Powyższym równaniom odpowiadają cztery równania skalarne o postaci

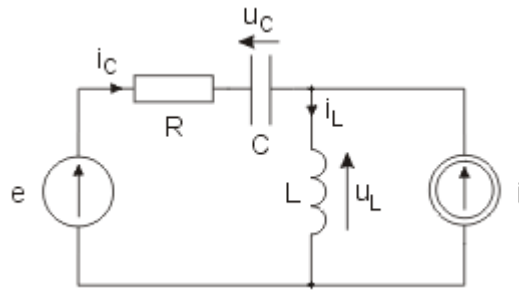
$$\begin{aligned} -2x_{11} - 2x_{21} &= -4x_{11} \\ -x_{11} - 3x_{21} &= -4x_{21} \\ -2x_{12} - 2x_{22} &= -x_{12} \\ -x_{12} - 3x_{22} &= -x_{22} \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę, że dwa spośród nich są zależne, dwie zmienne można przyjąć dowolnie, na przykład $x_{11} = 1$ oraz $x_{21} = 1$. Z rozwiązania pozostałych 2 równań otrzymuje się wektory własne o postaci

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Przykład 10.2

Napisać układ równań stanu dla obwodu elektrycznego przedstawionego na rys. 10.1



Rys. 10.1. Schemat obwodu do przykładu 10.2

Rozwiązanie

Z praw Kirchhoffa napisanych dla obwodu z rys. 10.1 wynikają następujące równania

$$e = Ri_c + u_c + u_L$$

$$i = i_L - i_c$$

Biorąc pod uwagę, że

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

oraz

$$i_c = C \frac{du_c}{dt}$$

równania Kirchhoffa można przekształcić do równoważnej postaci równań różniczkowych

$$e = R(i_L - i) + L \frac{di_L}{dt} + u_c$$

$$C \frac{du_c}{dt} = i_L - i$$

które przyjmują uporządkowaną formę odpowiadającą postaci (10.9)

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L}i_L - \frac{1}{L}u_c + \frac{1}{L}e + \frac{R}{L}i$$

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{1}{C}i_L - \frac{1}{C}i$$

Równania powyższe można zapisać w postaci zależności macierzowej równania stanu, w której zmiennymi stanu są prąd cewki i napięcie kondensatora.

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{du_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{R}{L} \\ 0 & \frac{-1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ i \end{bmatrix}$$

Wektor stanu $\mathbf{x}$ jest równy

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix}$$

a wektor wymuszeń

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} e \\ i \end{bmatrix}.$$

Obwód liniowy zawierający dwa elementy reaktancyjne (cewka i kondensator) opisuje się więc macierzowym równaniem stanu drugiego rzędu. Macierz stanu $\mathbf{A}$ jest macierzą również drugiego rzędu o współczynnikach uzależnionych od wartości rezystancji, pojemności oraz indukcyjności. Macierz $\mathbf{B}$ zawiera dwa wiersze (liczba zmiennych stanu) oraz dwie kolumny (liczba wymuszeń w obwodzie). Przyjmując w analizie wartości liczbowe obwodu: $R=2\Omega$, $L=1\text{H}$, $C=1\text{F}$ otrzymuje się macierz stanu $\mathbf{A}$ o postaci

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Równanie charakterystyczne tej macierzy jest równe

$$\det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}) = \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = s^2 + 2s + 1$$

Wartości własne (pierwiastki równania charakterystycznego) są w tym przypadku sobie równe i wynoszą $s_1 = s_2 = -1$. Dla rozważanego obwodu RLC są one położone w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s na ujemnej osi rzeczywistej.

10.4.3 Wyznaczanie macierzy e^{At}

Kluczem do wyznaczenia rozwiązania obwodu w stanie przejściowym metodą zmiennych stanu jest określenie macierzy e^{At} . Istnieje wiele metod rozwiązania tego zadania. Tutaj przedstawimy trzy z nich: metodę Lagrange’a-Sylvestera, diagonalizacji macierzy oraz Cayleya-Hamiltona. W każdej z nich wymagane jest wyznaczenie wartości własnych s_i macierzy A .

Metoda Lagrange’a-Sylvestera

W metodzie tej macierz e^{At} wyznacza się z prostej zależności podanej w postaci jawnej

$$e^{At} = \sum_{r=1}^n e^{s_r t} \frac{\prod_{t \neq r}^n (s_t \mathbf{1} - A)}{\prod_{t \neq r}^n (s_t - s_r)} \quad (10.26)$$

Z analizy powyższego wzoru widoczne jest, że metoda Lagrange’a-Sylvestera obowiązuje jedynie dla przypadku wartości własnych pojedynczych (przy wartościach wielokrotnych mianownik zależności staje się zerowy).

Metoda diagonalizacji macierzy

W metodzie diagonalizacji macierzy zastępuje się obliczenie macierzy e^{At} poprzez transformację macierzy A do postaci diagonalnej D o tych samych wartościach własnych. Diagonalna macierz D posiada prostą formę macierzową e^{Dt} , będącą również macierzą diagonalną o postaci

$$e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{s_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{s_2 t} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & e^{s_n t} \end{bmatrix} \quad (10.27)$$

Mnożąc obustronnie równanie stanu $dx/dt = Ax$ przez nieosobliwą macierz U przekształca się je do postaci $d(Ux)/dt = UAx$. Wprowadźmy nowy wektor $v = Ux$. Wówczas oryginalne równanie stanu przekształca się do postaci określonej względem v , przy czym

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{D}\mathbf{v} \quad (10.28)$$

gdzie $\mathbf{D}$ jest macierzą diagonalną określoną wzorem $\mathbf{D}=\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1}$ o wartościach diagonalnych równych wartościom własnym macierzy $\mathbf{A}$. Macierz przekształcenia $\mathbf{U}$ należy tak dobrać, aby spełniona była równość $\mathbf{U}\mathbf{A}=\mathbf{D}\mathbf{U}$. Zależność ta reprezentuje sobą układ równań liniowych. Rozwiązanie równania stanu (19.28) dane jest w prostej formie

$$\mathbf{v}(t) = e^{\mathbf{D}t} \mathbf{v}(0) \quad (10.29)$$

Biorąc pod uwagę, że $\mathbf{v}=\mathbf{U}\mathbf{x}$, po wstawieniu tej zależności do równania (10.29) otrzymuje się $\mathbf{U}\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{D}t} \mathbf{U}\mathbf{x}(0)$, co pozwala napisać wyrażenie na $\mathbf{x}(t)$ w postaci

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}^{-1} e^{\mathbf{D}t} \mathbf{U}\mathbf{x}(0) \quad (10.30)$$

Oznacza to, że macierz $e^{\mathbf{A}t}$ została określona wzorem

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{U}^{-1} e^{\mathbf{D}t} \mathbf{U} \quad (10.31)$$

Zauważmy, że powyższa metoda prowadzi do wyniku wyłącznie dla pojedynczych wartości własnych macierzy $\mathbf{A}$, podobnie jak metoda Lagrange'a-Sylwestera.

Metoda Cayleya-Hamiltona

Zgodnie z tą metodą macierz $e^{\mathbf{A}t}$ rozwija się w szereg skończony o n składnikach (n – stopień macierzy $\mathbf{A}$)

$$e^{\mathbf{A}t} = a_0 \mathbf{1} + a_1 \mathbf{A} + \dots + a_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} \quad (10.32)$$

Dla pełnego określenia rozwiązania należy wyznaczyć wszystkie współczynniki a_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) rozwinięcia (10.32).

W przypadku pojedynczych wartości własnych nieznane współczynniki wyznacza się z rozwiązania układu n równań skalarnych, wynikających z twierdzenia Cayleya-Hamiltona. Zgodnie z tym twierdzeniem każda macierz kwadratowa spełnia swoje równanie

charakterystyczne. Oznacza to w praktyce, że równanie (10.32) musi być spełnione również przez wartości własne macierzy $\mathbf{A}$ (macierz $\mathbf{A}$ jest zastąpiona w tym równaniu przez kolejne wartości własne skalarne). W przypadku pojedynczych wartości własnych prowadzi to do układu n równań z n niewiadomymi o postaci

$$\begin{aligned} e^{s_1 t} &= a_0 + a_1 s_1 + \dots + a_{n-1} s_1^{n-1} \\ e^{s_2 t} &= a_0 + a_1 s_2 + \dots + a_{n-1} s_2^{n-1} \\ &\vdots \\ e^{s_n t} &= a_0 + a_1 s_n + \dots + a_{n-1} s_n^{n-1} \end{aligned} \quad (10.33)$$

Rozwiązanie powyższego układu równań względem współczynników a_i pozwala określić pełną postać macierzy e^{At} według wzoru (10.32).

Wzór Cayleya-Hamiltona obowiązuje również dla wielokrotnych wartości własnych, przy czym ubytek równań w zbiorze (10.33) wynikający z wielokrotności wartości własnych uzupełnia się analogicznymi równaniami obowiązującymi dla pochodnych względem wartości własnej wielokrotnej. Przykładowo, jeśli k -ta wartość własna s_k występuje podwójnie, wówczas obowiązują dla niej dwie równości Cayleya-Hamiltona o postaci

$$\begin{aligned} e^{s_k t} &= a_0 + a_1 s_k + \dots + a_{n-1} s_k^{n-1} \\ \frac{de^{s_k t}}{ds_k} &= t e^{s_k t} = a_1 + 2a_2 s_k + \dots + (n-1)a_{n-1} s_k^{n-2} \end{aligned} \quad (10.34)$$

W ten sposób brakujące równanie w układzie (10.33) zostaje zastąpione równaniem dla pochodnej i układ równań pozostaje rozwiązywalny.

Przykład 10.3

Obliczanie macierzy e^{At} zilustrujemy na przykładzie macierzy stanu $\mathbf{A}$ o podwójnej wartości własnej. Macierz stanu dana jest w postaci

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie

Równanie charakterystyczne macierzy $\mathbf{A}$

$$\det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}) = s^2 + 4s + 4 = 0$$

Wartości własne są pierwiastkami równania charakterystycznego i równają się $s_1=s_2=-2$ (pierwiastek podwójny). Wobec podwójnej wartości własnej macierz $e^{\mathbf{A}t}$ wyznaczmy stosując metodę Cayleya-Hamiltona. Zgodnie z tą metodą dla macierzy stopnia $n=2$ mamy

$$e^{\mathbf{A}t} = a_0 \mathbf{1} + a_1 \mathbf{A}$$

Wartości współczynników a_i wyznaczmy rozwiązując układ równań

$$\begin{aligned} e^{s_1 t} &= a_0 + a_1 s_1 \\ \frac{de^{s_1 t}}{ds_1} &= te^{s_1 t} = a_1 \end{aligned}$$

Po wstawieniu wartości liczbowych otrzymuje się

$$\begin{aligned} e^{-2t} &= a_0 - 2a_1 \\ te^{-2t} &= a_1 \end{aligned}$$

Rozwiązanie względem współczynników a_0 i a_1 pozwala uzyskać

$$\begin{aligned} a_0 &= e^{-2t} + 2te^{-2t} \\ a_1 &= te^{-2t} \end{aligned}$$

Po wstawieniu tych wartości do wzoru na $e^{\mathbf{A}t}$ otrzymuje się

$$e^{\mathbf{A}t} = (e^{-2t} + 2te^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + te^{-2t} \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (e^{-2t} - 2te^{-2t}) & -2te^{-2t} \\ 2te^{-2t} & (e^{-2t} + 2te^{-2t}) \end{bmatrix}$$

nadobowięzko

10.4.4 Obliczanie stanu nieustalonego w obwodzie metodą zmiennych stanu

Jak zostało przedstawione na wstępie najwygodniejszą metodą obliczenia przebiegów czasowych w stanie nieustalonym metodą zmiennych stanu jest rozdzielenie stanu nieustalonego po przełączeniu w obwodzie na stan ustalony i przejściowy. Stan ustalony określany jest metodą symboliczną, a stan przejściowy metodą zmiennych stanu. W ten

sposób unika się trudnego problemu całkowania złożonych zależności matematycznych. W efekcie rozwiązanie stanu nieustalonego w obwodzie składa się z następujących etapów.

- Określenie warunków początkowych w obwodzie przed przełączeniem. W praktyce oznacza to wyznaczenie prądów cewek i napięć kondensatorów w obwodzie w stanie ustalonym (np. metodą symboliczną), przejście na postać czasową tych rozwiązań i określenie wszystkich wartości prądów cewek i napięć kondensatorów w chwili przełączenia. Wartości początkowe $i_L(0^-)$ oraz $u_C(0^-)$ utworzą wektor stanu $\mathbf{x}$ w chwili początkowej 0^- .
- Określenie stanu ustalonego w obwodzie po przełączeniu (np. metodą symboliczną). W wyniku otrzymuje się wartości ustalone prądów cewek $i_{Lu}(t)$ i napięć kondensatorów $u_{Cu}(t)$. Wartości te tworzą wektor $\mathbf{x}_u(t)$ w stanie ustalonym.
- Określenie stanu przejściowego w obwodzie po przełączeniu. Obwód dla stanu przejściowego powstaje po odrzuceniu wszystkich źródeł wymuszających niezależnych (zwarcie źródeł napięcia $e(t)$ oraz rozwarcie źródeł prądowych $i(t)$), od których odpowiedź w stanie ustalonym została już obliczona. Obwód taki opisuje się równaniem stanu o postaci $d\mathbf{x}_p/dt = \mathbf{A}\mathbf{x}_p$ którego rozwiązanie określone jest zależnością (10.21) przy warunkach początkowych określonych dla składowej przejściowej zmiennych stanu. Oznacza to konieczność określenia dla każdej cewki i kondensatora wielkości $i_{Lp}(0^+)$ oraz $u_{Cp}(0^+)$. Korzystając z równania (10.20) otrzymuje się

$$\begin{aligned} u_{Cp}(0^+) &= u_C(0^-) - u_{Cu}(0^+) \\ i_{Lp}(0^+) &= i_L(0^-) - i_{Lu}(0^+) \end{aligned} \quad (10.35)$$

Po określeniu warunków początkowych dla składowej przejściowej można z zależności (10.21) wyznaczyć pełne rozwiązanie obwodu w stanie przejściowym.

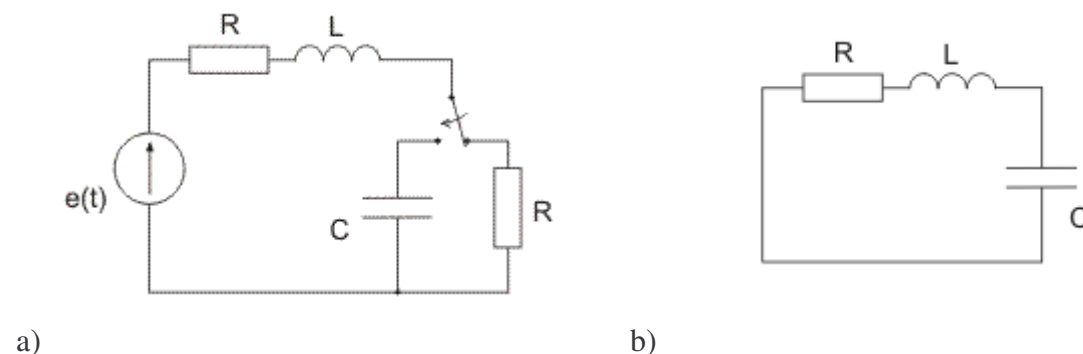
- Rozwiązanie całkowite obwodu składa się z części ustalonej i przejściowej. Można je zapisać w postaci

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_{Cu}(t) + u_{Cp}(t) \\ i_L(t) &= i_{Lu}(t) + i_{Lp}(t) \end{aligned} \quad (10.36)$$

co odpowiada zapisowi macierzowemu dla zmiennych stanu $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_u(t) + \mathbf{x}_p(t)$.

Przykład 10.4

Rozpatrzmy stan nieustalony w obwodzie RLC przedstawionym na rys. 10.2a po przełączeniu. Dane elementów: $R=5\Omega$, $L=2H$, $C=0,5F$, $e(t)=6V$ (napięcie stałe).



Rys. 10.2 Obwód RLC do przykładu 10.4: a) obwód wyjściowy, b) postać obwodu do wyznaczenia stanu przejściowego

Rozwiązanie

Warunki początkowe w postaci prądu cewki i napięcia na kondensatorze oblicza się na podstawie stanu ustalonego przed przełączeniem. Przy stałym wymuszeniu w obwodzie ($\omega=0$) cewka stanowi zwarcie a kondensator przerwę. Oznacza to, że prąd płynący w obwodzie jest równy $i_L(t)=6/10=0,6A$. Stąd $i_L(0^-)=0,6$. Napięcie na kondensatorze (przed przełączeniem pozostaje poza obwodem) jest zerowe, stąd $u_C(0^-)=0$.

Po przełączeniu powstaje obwód złożony z szeregowego połączenia elementów R , L i C . W stanie ustalonym wobec $\omega=0$ kondensator stanowi przerwę i prąd ustalony w takim obwodzie nie płynie, $i_{Lu}(t)=0$ a napięcie kondensatora $u_{Cu}(t)=6$. Oznacza to, że warunki początkowe dla składowej ustalonej dane są w postaci: $i_{Lu}(0^+)=0$ oraz $u_{Cu}(0^+)=6$.

Wyznaczenie stanu przejściowego rozpoczniemy od warunków początkowych dla tego stanu. Warunki początkowe dla stanu przejściowego określone są w postaci (patrz równanie (10.35))

$$i_{Lp}(0^+) = i_L(0^-) - i_{Lu}(0^+) = 0,6 - 0 = 0,6$$

$$u_{Cp}(0^+) = u_C(0^-) - u_{Cu}(0^+) = 0 - 6 = -6$$

Stąd warunki początkowe dla stanu przejściowego można zapisać w postaci wektorowej

$$\mathbf{x}_p(0^+) = \begin{bmatrix} i_{Lp}(0^+) \\ u_{Cp}(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Równania stanu przejściowego dotyczą obwodu bez wymuszeń zewnętrznych (źródło napięciowe zwarte) przedstawionego na rys. 10.2b. Z prawa napięciowego Kirchhoffa po uwzględnieniu równań elementów obwodu otrzymuje się następujące równania różniczkowe

$$L \frac{di_{Lp}}{dt} + Ri_{Lp} + u_{Cp} = 0$$

$$i_{Lp} = C \frac{du_{Cp}}{dt}$$

Po uporządkowaniu tych równań otrzymuje się równanie macierzowe stanu w postaci

$$\begin{bmatrix} \frac{di_{Lp}}{dt} \\ \frac{du_{Cp}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{Lp} \\ u_{Cp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,5 & -0,5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{Lp} \\ u_{Cp} \end{bmatrix}$$

z którego wynika, że macierz stanu $\mathbf{A}$ jest równa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2,5 & -0,5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Równanie charakterystyczne dla macierzy $\mathbf{A}$ dane jest w postaci

$$\det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}) = s^2 + 2,5s + 1 = 0$$

Wartości własne są pierwiastkami równania charakterystycznego i równają się $s_1 = -2$, $s_2 = -0,5$.

Macierz $e^{\mathbf{A}t}$ wyznaczmy stosując metodę Sylwestera. Zgodnie z tą metodą

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{s_1 t} \frac{(s_2 \mathbf{1} - \mathbf{A})}{(s_2 - s_1)} + e^{s_2 t} \frac{(s_1 \mathbf{1} - \mathbf{A})}{(s_1 - s_2)} = e^{-2t} \frac{\begin{bmatrix} 2 & 0,5 \\ -2 & -0,5 \end{bmatrix}}{3/2} + e^{-0,5t} \frac{\begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}}{-3/2}$$

Po wykonaniu odpowiednich operacji matematycznych otrzymuje się

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} (1,33e^{-2t} - 0,33e^{-0,5t}) & (0,33e^{-2t} - 0,33e^{-0,5t}) \\ (-1,33e^{-2t} + 1,33e^{-0,5t}) & (-0,33e^{-2t} + 1,33e^{-0,5t}) \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie określające wektor stanu w stanie przejściowym oblicza się z zależności

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_p(0^+) = \begin{bmatrix} -1,2e^{-2t} + 1,8e^{-0,5t} \\ 1,2e^{-2t} - 7,2e^{-0,5t} \end{bmatrix}$$

Całkowite rozwiązanie obwodu w stanie nieustalonym można więc przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} i_L(t) &= i_{Lu}(t) + i_{Lp}(t) = -1,2e^{-2t} + 1,8e^{-0,5t} \\ u_C(t) &= u_{Cu}(t) + u_{Cp}(t) = 6 + 1,2e^{-2t} - 7,2e^{-0,5t} \end{aligned}$$

10.5 Metoda klasyczna rozwiązywania równań różniczkowych

W przypadku, gdy interesuje nas tylko jedna wybrana zmienna (jeden prąd bądź jedno napięcie w obwodzie) układ równań stanu pierwszego rzędu można sprowadzić do jednego równania różniczkowego n -tego rzędu względem tej zmiennej

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t) \quad (10.37)$$

Rozwiązanie powyższego równania różniczkowego, podobnie jak w metodzie zmiennych stanu, można przedstawić w postaci sumy dwu składowych: ustalonej $x_u(t)$ wymuszonej przez źródło oraz składowej przejściowej $x_p(t)$, zwanej również składową swobodną, pochodzącą od niezerowych warunków początkowych

$$x(t) = x_u(t) + x_p(t) \quad (10.38)$$

Składowa wymuszona stanowi rozwiązanie ustalone obwodu po komutacji i może być wyznaczona metodą symboliczną. **Składowa przejściowa** charakteryzuje fizycznie procesy zachodzące w obwodzie elektrycznym na skutek niezerowych warunków początkowych przy braku wymuszeń zewnętrznych. Odpowiada ona obwodowi, w którym wyeliminowano wszystkie zewnętrzne źródła wymuszające (źródła napięciowe zwarte a prądowe rozwarte).

Składowa przejściowa zależy jedynie od warunków początkowych (napięć początkowych kondensatorów i prądów początkowych cewek), struktury obwodu i wartości

parametrów tego obwodu. Dla obwodów elektrycznych zawierających elementy rozpraszające energię (rezystancje) składowa przejściowa, jak zostanie pokazane później, zanika z biegiem czasu do zera. Równanie składowej przejściowej otrzymuje się zakładając wymuszenie $f(t)$ we wzorze (10.37) równe zeru i zastępując zmienną $x(t)$ poprzez jej składową przejściową $x_p(t)$. Otrzymuje się wówczas **równanie różniczkowe jednorodne** o postaci

$$a_n \frac{d^n x_p}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_p}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} x_p}{dt^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{dx_p}{dt} + a_0 x_p = 0 \quad (10.39)$$

Rozwiązanie powyższego równania jednorodnego uzyskuje się za pośrednictwem równania charakterystycznego

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (10.40)$$

Jest to wielomian n -tego rzędu zmiennej zespolonej s o współczynnikach rzeczywistych a_i . Jest on identyczny z równaniem charakterystycznym otrzymanym dla zmiennych stanu. Pierwiastki s_i ($i=1, 2, \dots, n$) tego wielomianu stanowią **bieguny układu**, identyczne z wartościami własnymi macierzy stanu **A**. W tym punkcie ograniczymy się jedynie do przypadku biegunów pojedynczych. Przy takim założeniu rozwiązanie równania (10.39) dla składowej przejściowej zapiszemy w postaci

$$x_p(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{s_i t} \quad (10.41)$$

W rozwiązaniu tym współczynniki A_i są stałymi całkowania, które należy wyznaczyć wykorzystując znajomość warunków początkowych w obwodzie (napięć kondensatorów i prądów cewek w chwili komutacji $t=0$). W tym celu należy wyznaczyć rozwiązanie równania (10.39) dla każdej składowej przejściowej zmiennej stanu $x_{pk}(t)$ oddzielnie, a następnie rozwiązanie całkowite $x_k(t) = x_{uk}(t) + x_{pk}(t)$ dla $k=1, 2, \dots, n$. Każda ze zmiennych $x_k(t)$ posiada znaną wartość rozwiązania $x_k(0^-)$ w chwili $t=0$ (warunki początkowe). Z ciągłości prądów cewek i napięć kondensatorów wynika następująca zależność

$$x_k(0^-) = x_{uk}(0^+) + x_{pk}(0^+) \quad (10.42)$$

Pisząc tę równość dla wszystkich n zmiennych stanu otrzymuje się n równań algebraicznych z n nieznanymi współczynnikami A_i . Z rozwiązania tego układu wyznacza się wszystkie współczynniki A_i i podstawia do wzoru ogólnego (10.41). Po wyznaczeniu rozwiązania obwodu dla składowej ustalonej i przejściowej rozwiązanie całkowite równania (10.37) jest sumą obu rozwiązań cząstkowych, to znaczy

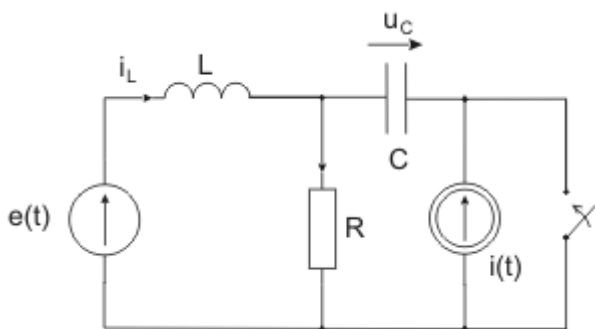
$$x(t) = x_u(t) + x_p(t) \quad (10.43)$$

Powyższa procedura rozwiązania stanu nieustalonego w obwodzie poprzez rozwiązanie układu równań różniczkowych wyższego rzędu nosi nazwę **metody klasycznej**. Przy większej liczbie zmiennych jest ona dość uciążliwa w obliczeniach, gdyż wymaga pracochłonnego wyznaczania rozwiązań dla każdej składowej przejściowej zmiennych stanu. Dlatego w praktyce stosuje się zwykle tylko do równań pierwszego rzędu. W tej pracy zastosujemy ją do rozwiązania stanu nieustalonego w obwodzie RL oraz RC przy załączeniu napięcia stałego.

Zadania sprawdzające

Zadanie 10.1

Wyznaczyć warunki początkowe w obwodzie przedstawionym na rys. 10.3. Parametry elementów obwodu są następujące: $L=1\text{H}$, $C=0,5\text{F}$, $R=1\Omega$, $e(t) = 10\sqrt{2}\sin(t + 45^\circ)\text{V}$, $i(t) = 2\sin(t - 45^\circ)\text{A}$.



Rys. 10.3. Schemat obwodu do zadania 10.1

Rozwiązanie

Warunki początkowe dotyczą stanu ustalonego przed przełączeniem, w którym w obwodzie działają oba źródła wymuszające. Stosując metodę symboliczną analizy obwodu otrzymujemy

$$E = 10e^{j45^\circ}$$

$$I = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{-j45^\circ}$$

$$\omega = 1$$

$$Z_L = j\omega L = j1$$

$$Z_C = -j/\omega C = -j2$$

Równania obwodu:

$$E = Z_L I_L + R(I + I_L)$$

$$I_L = \frac{E - RI}{R + Z_L} = 7,21e^{j11,31^\circ}$$

$$U_C = Z_C I = \frac{4}{\sqrt{2}}e^{-j135^\circ}$$

$$i_L(t) = 7,21\sqrt{2}\sin(t + 11,31^\circ)$$

$$u_C(t) = 4\sin(t - 135^\circ)$$

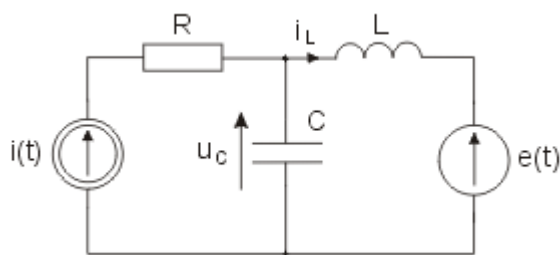
Warunki początkowe:

$$i_L(0^-) = 2$$

$$u_C(0^-) = -2\sqrt{2}$$

Zadanie 10.2

Napisać równanie stanu dla obwodu o strukturze przedstawionej na rys. 10.4.



Rys. 10.4. Schemat obwodu do zadania 10.2

Rozwiązanie

Z praw Kirchhoffa napisanych dla obwodu z rysunku wynika

$$i(t) = i_L + C \frac{du_C}{dt}$$

$$e(t) = u_C - L \frac{di_L}{dt}$$

Po przekształceniach tych równań otrzymujemy

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} [i(t) - i_L]$$

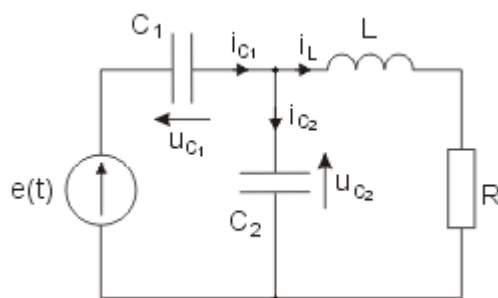
$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} [u_C - e(t)]$$

Równanie stanu:

$$\begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/C \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$$

Zadanie 10.3

Napisać równanie stanu obwodu o strukturze przedstawionej na rys. 10.5.



Rys. 10.5 Schemat obwodu do zadania 10.3

Rozwiązanie

Z równań Kirchhoffa napisanych dla obwodu z rys. 10.5 otrzymuje się

$$\begin{aligned} e(t) &= u_{C_1} + u_{C_2} \\ u_{C_2} &= L \frac{di_L}{dt} + Ri_L \\ C_1 \frac{du_{C_1}}{dt} &= i_L + C_2 \frac{du_{C_2}}{dt} \end{aligned}$$

Po wyznaczeniu u_{C_1} z równania pierwszego i przekształceniu powstałych równań otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{di_L}{dt} &= \frac{1}{L} [u_C - Ri_L] \\ \frac{du_{C_2}}{dt} &= \frac{1}{C_1 + C_2} \left[-i_L + C_1 \frac{de(t)}{dt} \right] \end{aligned}$$

Postać macierzowa równań stanu:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{du_{C_2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C_1 + C_2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L \\ u_{C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot e(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{C_1}{C_1 + C_2} \end{bmatrix} \frac{de(t)}{dt}$$

Jak widać pomimo trzech elementów reaktancyjnych w obwodzie, równanie stanu jest drugiego rzędu. Wynika to z faktu, że napięcie jednego kondensatora jest liniowo zależne od

napięcia źródła i napięcia na drugim kondensatorze. W wyniku redukcji liczby zmiennych stanu równania stanu są zależne od pochodnej funkcji wymuszenia.

Lekcja 11. Stany nieustalone w obwodach RL i RC

Wstęp

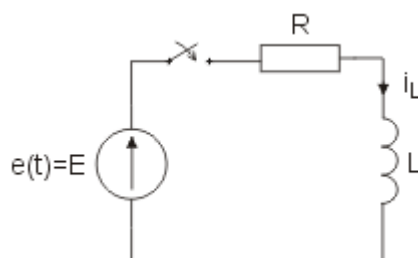
Dla zrozumienia istoty stanu nieustalonego rozpatrzmy zjawiska jakie towarzyszą procesowi komutacji w najprostszych obwodach zawierających cewkę bądź kondensator. Oba wymienione elementy reaktancyjne gromadzą energię. Prawo zachowania energii wymusza pewien stan przejściowy zachodzący pomiędzy stanami ustalonymi przed i po przełączeniu. Musi upłynąć pewien czas trwania stanu przejściowego, w którym stan nieustalony przejdzie w ustalony.

W tej lekcji analizę stanu nieustalonego przeprowadzimy przy zastosowaniu metody klasycznej. Podamy opisy różniczkowe obwodów RL i RC oraz ich rozwiązania w dziedzinie czasu. Przebiegi prądów i napięć w obwodach zawierających jeden element reaktancyjny są typu wykładniczego, scharakteryzowanego przez stałą czasową, decydującą o czasie trwania stanu nieustalonego. Pokażemy wpływ stałej czasowej na przebiegi czasowe w obu obwodach.



11.1 Stan nieustalony w szeregowym obwodzie RL przy załączeniu napięcia stałego

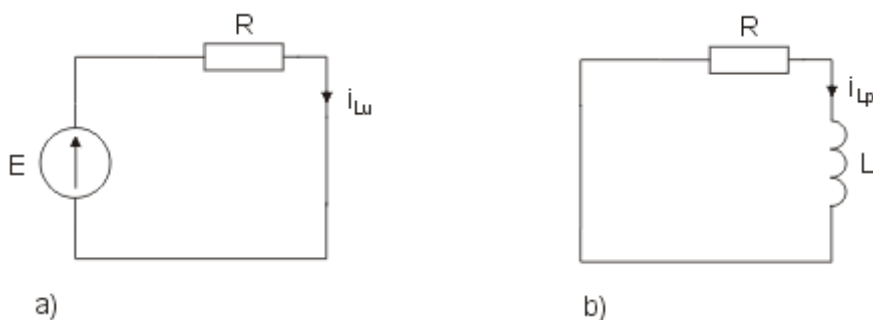
Jako pierwszy przykład zastosowania metody klasycznej rozpatrzmy stan nieustalony w obwodzie szeregowym RL przy zerowych warunkach początkowych i załączeniu napięcia stałego jak to zostało w symboliczny sposób przedstawione na rys. 11.1. Zerowe warunki początkowe obwodu oznaczają, że $i_L(0^-) = 0$.



Rys. 11.1. Obwód szeregowy RL przy załączeniu napięcia stałego

Po przełączeniu w obwodzie RL powstaje stan nieustalony, który po określonym czasie prowadzi do powstania nowego stanu ustalonego wynikającego z nowego układu połączeń elementów. Stan nieustalony jest superpozycją stanu ustalonego i przejściowego.

Stan ustalony w obwodzie RL przy wymuszeniu stałym oznacza, że cewka stanowi zwarcie (rys. 11.2a).



Rys. 11.2. Postać obwodu RL do obliczenia składowej a) ustalonej i b) przejściowej

Na podstawie napięciowego prawa Kirchhoffa prąd ustalony tej cewki jest równy

$$i_{Lu}(t) = E / R \quad (11.1)$$

Przechodząc do obliczenia stanu przejściowego należy wyeliminować zewnętrzne źródło zasilające. Ponieważ jest to źródło napięciowe, należy go zwrzeć. Schemat obwodu dla stanu przejściowego po zwarceniu źródła zasilającego, dla którego odpowiedź została właśnie obliczona, ma postać przedstawioną na rys. 11.2b. Stosując prawo napięciowe Kirchhoffa dla tego obwodu przy uwzględnieniu

$$u_{Lp} = L \frac{di_{Lp}}{dt} \quad (11.2)$$

otrzymuje się równanie różniczkowe jednorodne (brak wymuszenia) dla składowej przejściowej o postaci

$$L \frac{di_{Lp}}{dt} + Ri_{Lp} = 0 \quad (11.3)$$

Równanie charakterystyczne odpowiadające powyższemu równaniu różniczkowemu przyjmuje postać

$$Ls + R = 0 \quad (11.4)$$

Równanie to posiada tylko jeden pierwiastek

$$s_1 = -\frac{R}{L} \quad (11.5)$$

Wykorzystując wzór (10.41) rozwiązanie stanu przejściowego dla prądu w obwodzie RL zapiszemy w postaci

$$i_{Lp} = A_1 e^{-\frac{t}{L/R}} \quad (11.6)$$

w której współczynnik A_1 jest nieznaną stałą całkowania. Rozwiązanie całkowite obwodu jest sumą składowej ustalonej i przejściowej. W związku z powyższym prąd cewki określony jest następującym wzorem

$$i_L(t) = i_{Lu}(t) + i_{Lp}(t) = \frac{E}{R} + A_1 e^{-\frac{t}{L/R}} \quad (11.7)$$

Z prawa komutacji dla cewki wynika, że $i_L(0^-) = i_L(0^+)$, stąd wobec $i_L(0^-) = 0$ otrzymuje się

$$0 = \frac{E}{R} + A_1 \quad (11.8)$$

oraz

$$A_1 = -E/R \quad (11.9)$$

Stąd rozwiązanie określające przebieg prądu cewki w stanie nieustalonym przyjmuje postać

$$i_L(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{L/R}} \right) \quad (11.10)$$

Wprowadzając pojęcie **stałej czasowej** τ obwodu RL

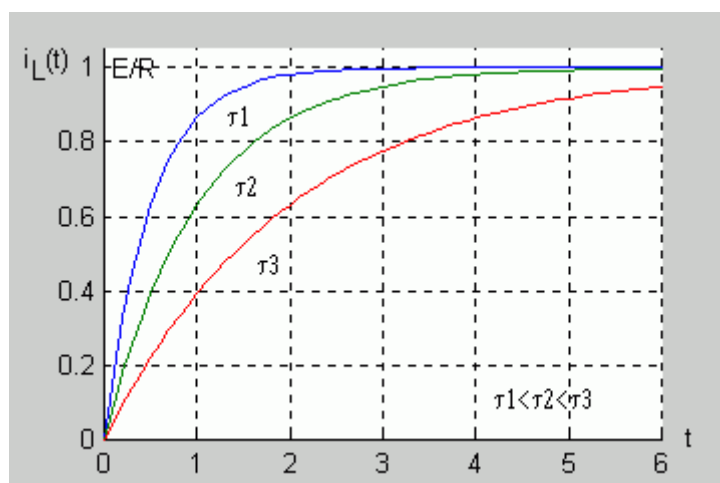
$$\tau = L/R \quad (11.11)$$

rozwiązanie na prąd cewki w stanie nieustalonym można zapisać w postaci

$$i_L(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (11.12)$$

Jednostką stałej czasowej jest sekunda (jednostką indukcyjności jest $1\text{H} = 1\Omega\text{s}$ a jednostką rezystancji 1Ω). Łatwo wykazać, że po upływie trzech stałych czasowych ($t = 3\tau$) prąd cewki uzyskuje prawie 95% swojej wartości ustalonej a po 5 stałych czasowych aż 99,3%. Oznacza to, że praktycznie po 5 stałych czasowych stan nieustalony w obwodzie zanika przechodząc w stan ustalony.

Na rys. 11.3 przedstawiono przebiegi prądu cewki dla różnych wartości stałej czasowej.



Rys. 11.3. Przebieg prądu cewki w stanie nieustalonym

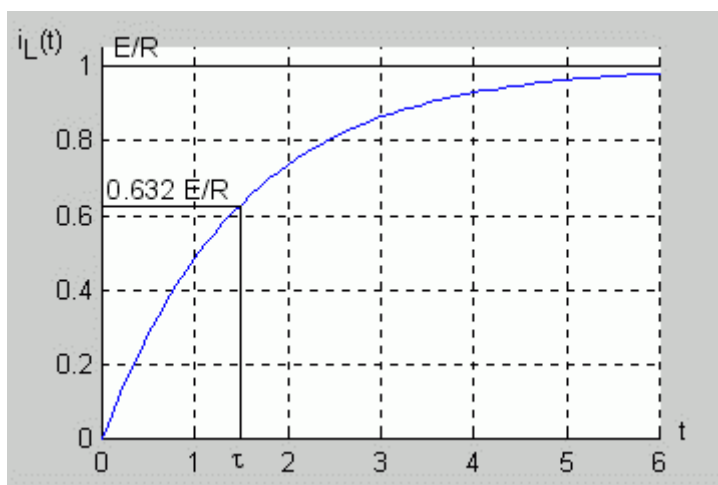


Jest to przebieg typu wykładniczego, w którym stan przejściowy trwa tym dłużej im dłuższa jest stała czasowa. Praktycznie po 5 stałych czasowych stan przejściowy w obwodzie zanika przechodząc w stan ustalony.

Stałą czasową obwodu RL można wyznaczyć na podstawie zarejestrowanego przebiegu nieustalonego bez znajomości wartości rezystancji i indukcyjności. Zauważmy, że dla $t = \tau$ prąd cewki przyjmuje wartość

$$i_L(\tau) = \frac{E}{R}(1 - e^{-1}) = 0,632 \frac{E}{R} \quad (11.13)$$

Oznacza to, że wartość prądu $i_L(t)|_{t=\tau} = 0,632 \frac{E}{R}$ wyznacza na osi odciętych wartość stałej czasowej. Sposób wyznaczania stałej czasowej zilustrowany jest na rys. 11.4.



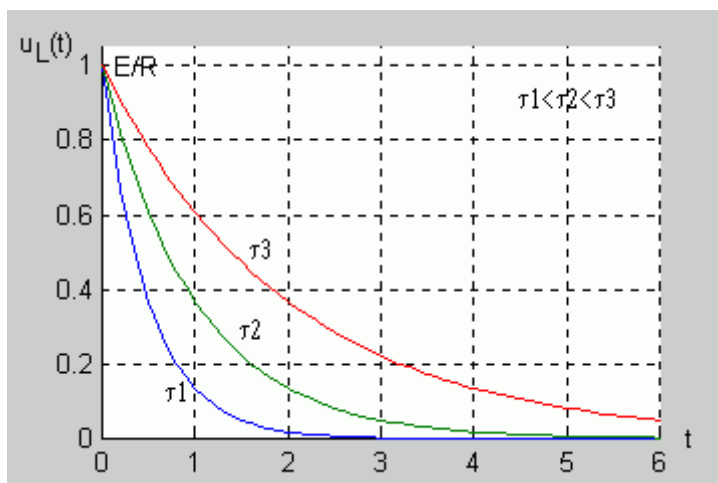
Rys. 11.4. Ilustracja sposobu wyznaczania stałej czasowej na podstawie zarejestrowanego przebiegu prądu cewki



Wyznaczenie rozwiązania na prąd w stanie nieustalonym w obwodzie RL pozwala na określenie przebiegu czasowego pozostałych wielkości w obwodzie. Korzystając z zależności definicyjnej cewki $u_L = L \frac{di_L}{dt}$ otrzymuje się

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = E e^{-\frac{t}{L/R}} \quad (11.14)$$

Przebieg napięcia na cewce w stanie nieustalonym w obwodzie szeregowym RL przedstawiono na rys. 11.5.



Rys. 11.5. Przebieg napięcia na cewce w stanie nieustalonym w obwodzie szeregowym RL



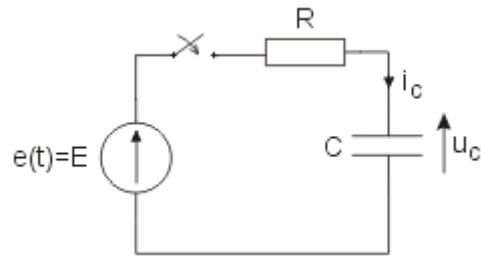
Napięcie na rezystorze R , jak wynika z prawa Ohma, jest proporcjonalne do prądu

$$u_R(t) = R i_L(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{L/R}} \right) \quad (11.15)$$

i ma kształt identyczny z przebiegiem prądu w obwodzie przedstawionym na rys. 11.3.

11.2 Stan nieustalony w gałęzi szeregowej RC przy załączeniu napięcia stałego

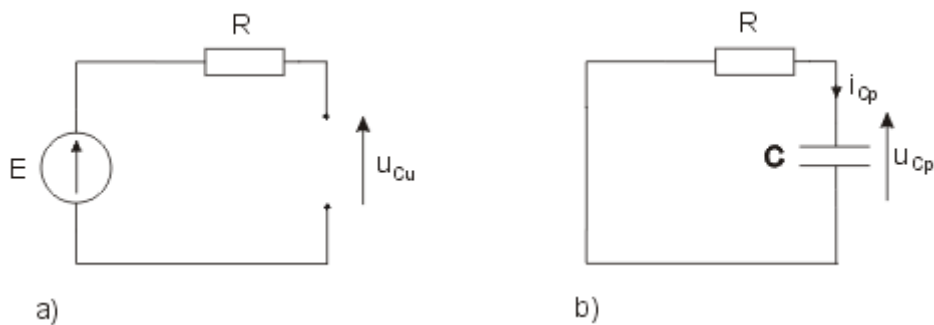
Rozpatrzmy stan nieustalony w obwodzie szeregowym RC przy zerowych warunkach początkowych i załączeniu napięcia stałego (rys. 11.6).



Rys. 11.6. Załączenie napięcia stałego do obwodu szeregowego RC

Wobec braku zasilania w obwodzie przed przełączeniem w warunki początkowe obwodu są zerowe, co oznacza, że $u_c(0^-) = 0$.

Po przełączeniu powstaje w obwodzie stan nieustalony, który po pewnym czasie prowadzi do powstania nowego stanu ustalonego. Stan nieustalony obwodu jest superpozycją stanu ustalonego i przejściowego. Stan ustalony w obwodzie RC przy wymuszeniu stałym ($\omega=0$) oznacza, że kondensator stanowi przerwę (rys. 11.7a).



Rys. 11.7 Schemat obwodu RC dla składowej a) ustalonej, b) przejściowej

Zgodnie z prawem napięciowym Kirchhoffa napięcie ustalone kondensatora jest równe

$$u_{cu}(t) = E \quad (11.16)$$

Schemat obwodu dla stanu przejściowego (po zwarcu źródła zasilającego, dla którego odpowiedź została właśnie obliczona) ma postać przedstawioną na rys. 11.7b. Stosując prawo napięciowe Kirchhoffa dla tego obwodu i uwzględniając, że $i_{cp} = C \frac{du_{cp}}{dt}$, otrzymuje się równanie różniczkowe jednorodne o postaci

$$RC \frac{du_{Cp}}{dt} + u_{Cp} = 0 \quad (11.17)$$

Równanie charakterystyczne odpowiadające mu przyjmuje więc postać

$$RCs + 1 = 0 \quad (11.18)$$

Równanie to posiada jeden pierwiastek $s_1 = -1/RC$. W związku z powyższym jego rozwiązanie wynikające ze wzoru (10.41) przyjmie uproszczoną postać

$$u_{Cp} = A_1 e^{s_1 t} = A_1 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (11.19)$$

W rozwiązaniu tym współczynnik A_1 jest stałą całkowania, którą należy wyznaczyć korzystając z prawa komutacji. Rozwiązanie całkowite będące sumą składowej ustalonej i przejściowej przybiera więc postać

$$u_C(t) = u_{Cu}(t) + u_{Cp}(t) = E + A_1 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (11.20)$$

Z prawa komutacji dla kondensatora wynika, że $u_C(0^-) = u_C(0^+)$, stąd wobec $u_C(0^-) = 0$ otrzymuje się

$$0 = E + A_1 \quad (11.21)$$

oraz

$$A_1 = -E$$

Rozwiązanie czasowe określające przebieg napięcia na kondensatorze przyjmuje więc postać

$$u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (11.22)$$

Wprowadzając pojęcie stałej czasowej τ obwodu RC jako iloczynu rezystancji R i pojemności C

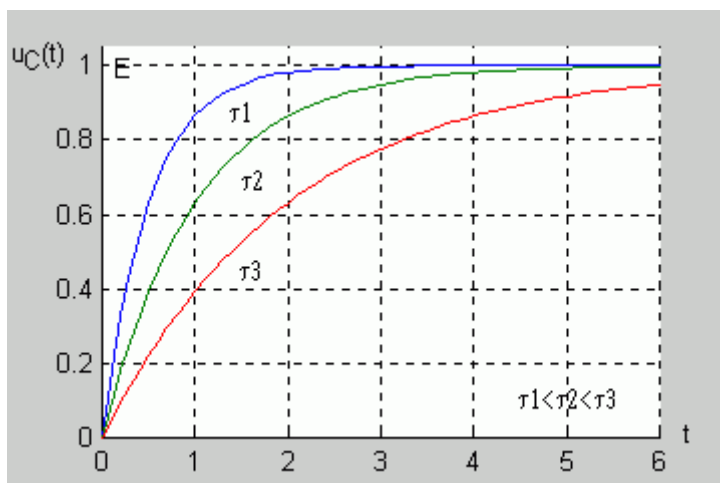
$$\tau = RC \quad (11.23)$$

rozwiązanie na napięcie kondensatora w stanie nieustalonym można zapisać w postaci

$$u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (11.24)$$

Jak łatwo sprawdzić podstawową jednostką stałej czasowej w obwodzie RC jest również sekunda (jednostką rezystancji jest $1\Omega = 1V/A$, a jednostką pojemności jest $1F = 1As/V$). Na rys. 11.8 przedstawiono przebiegi napięcia na kondensatorze w stanie nieustalonym

$u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$ dla różnych wartości stałej czasowej.



Rys. 11.8. Przebiegi napięcia na kondensatorze w stanie nieustalonym przy różnych stałych czasowych



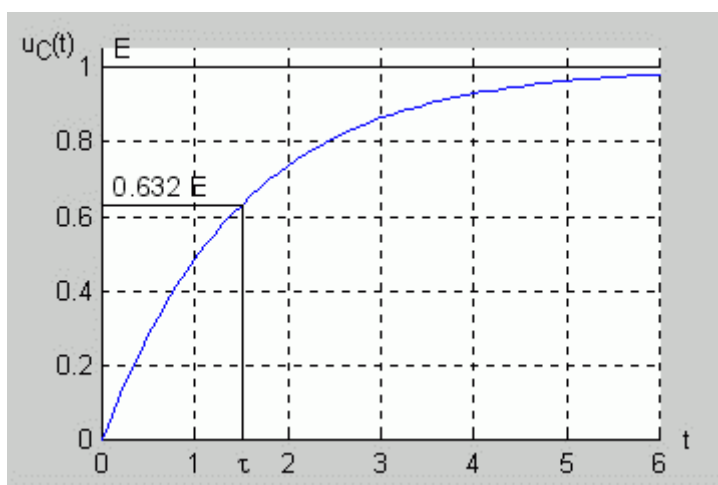
Im dłuższa stała czasowa tym dłużej trwa stan przejściowy w obwodzie (zanikanie zmian napięcia do zera).

Łatwo wykazać, że po upływie 3 stałych czasowych ($t = 3\tau$) napięcie uzyskuje prawie 95% swojej wartości ustalonej a po 5 stałych czasowych aż 99,3%. Oznacza to, że praktycznie po 5 stałych czasowych stan nieustalony w obwodzie zanika przechodząc w stan ustalony.

Stałą czasową można wyznaczyć bezpośrednio na podstawie zarejestrowanego przebiegu nieustalonego bez znajomości wartości rezystancji i pojemności, podobnie jak to miało miejsce w przypadku obwodu RL. Zauważmy, że dla $t = \tau$ napięcie na kondensatorze przyjmuje wartość

$$u_C(\tau) = E(1 - e^{-1}) = 0,632E \quad (11.25)$$

Oznacza to, że napięcie $u_C(t)|_{t=\tau} = 0,632E$ wyznacza na osi odciętych wartość stałej czasowej. Ilustruje to rys. 11.9.



Rys. 11.9. Wyznaczanie stałej czasowej obwodu RC na podstawie przebiegu czasowego napięcia kondensatora

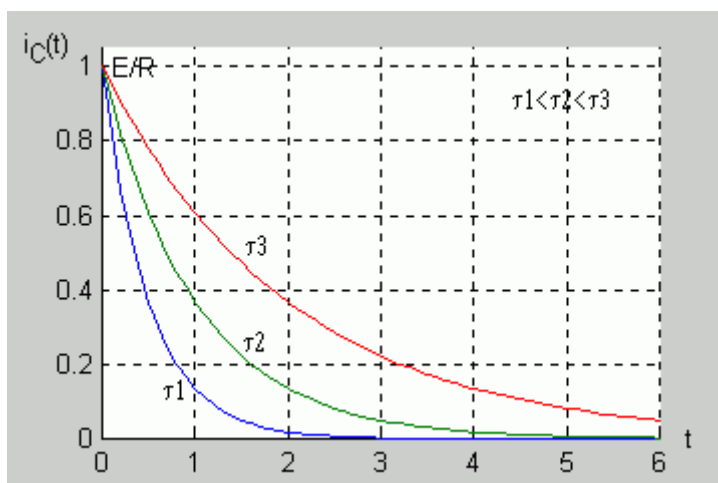


Po określeniu funkcji opisującej przebieg napięcia na kondensatorze można określić przebieg czasowy prądu w obwodzie. Korzysta się przy tym z zależności definicyjnej kondensatora

$$i_c = C \frac{du_c}{dt}, \text{ zgodnie z którą}$$

$$i_c(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (11.26)$$

Przebieg prądu ładowania kondensatora w stanie nieustalonym w obwodzie RC dla różnych stałych czasowych przedstawia rys. 11.10.



Rys. 11.10. Przebieg prądu ładowania kondensatora w obwodzie RC

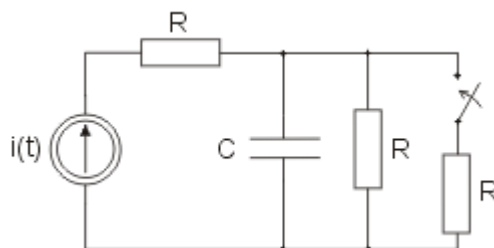


W chwili komutacji występuje skokowa zmiana wartości prądu (prąd kondensatora nie jest objęty komutacyjnym prawem ciągłości). Przebieg prądu kondensatora dąży do wartości ustalonej zerowej (w stanie ustalonym kondensator stanowi przerwę dla prądu). Stała czasowa zmian tego prądu jest identyczna jak napięcia i równa $\tau = RC$.

Zadania sprawdzające

Zadanie 11.1

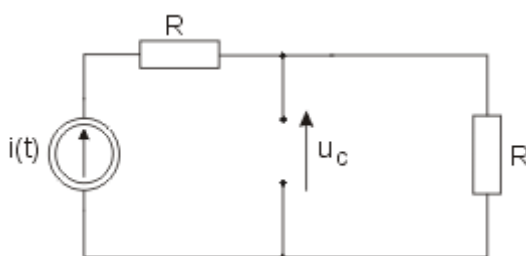
Określić przebieg czasowy napięcia na kondensatorze w stanie nieustalonym w obwodzie przedstawionym na rys. 11.11. Zastosować metodę klasyczną. Przyjąć następujące wartości parametrów: $R=10\text{k}\Omega$, $C=10\mu\text{F}$, $i(t) = I = 2\text{mA}$.



Rys. 11.11. Schemat obwodu do zadania 11.1

Rozwiązanie

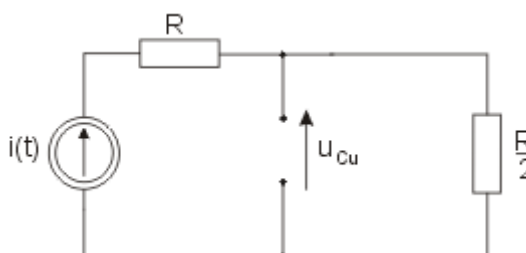
Warunki początkowe w obwodzie wynikają ze stanu ustalonego obwodu przed przełączeniem, który wobec wymuszenia stałego ma postać uproszczoną przedstawioną na rys. 11.12.



Rys. 11.12. Schemat obwodu w stanie ustalonym przed przełączeniem dla wymuszenia stałego

$$u_C(t) = u_C(0^-) = IR = 20\text{V}$$

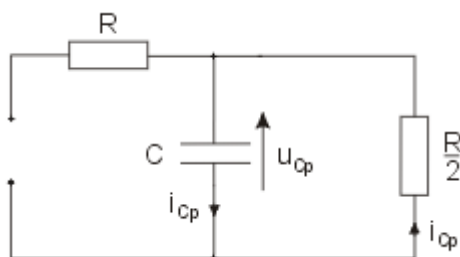
Stan ustalony w obwodzie po przełączeniu dotyczy obwodu przedstawionego na rys. 11.13.



Rys. 11.13. Schemat obwodu w stanie ustalonym po przełączeniu

$$u_{Cu}(t) = u_{Cu}(0^+) = IR/2 = 10V$$

Stan przejściowy dotyczy obwodu po przełączeniu przedstawionego na rys. 11.14



Rys. 11.14 Schemat obwodu w stanie przejściowym po przełączeniu

Równania różniczkowe obwodu:

$$u_{Cp} + C \frac{R}{2} \frac{du_{Cp}}{dt} = 0$$

$$u_{Cp} + 0,05 \frac{du_{Cp}}{dt} = 0$$

Równanie charakterystyczne:

$$1 + 0,05s = 0 \rightarrow s_1 = -200$$

Rozwiązanie równania różniczkowego:

$$u_{Cp}(t) = Ae^{-200t}$$

Rozwiązanie całkowite obwodu

$$u_C(t) = u_{Cu}(t) + u_{Cp}(t) = 10 + Ae^{-200t}$$

Z prawa komutacji dla kondensatora wynika równość

$$u_C(0^-) = u_C(0^+) \rightarrow 20 = 10 + A \rightarrow A = 10$$

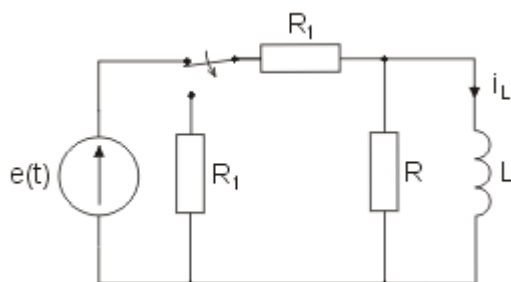
Postać rozwiązania ostatecznego:

$$u_C(t) = 10(1 + e^{-200t})$$

Stała czasowa obwodu jest więc równa $\tau = 1/200 = 0,005s$

Zadanie 11.2

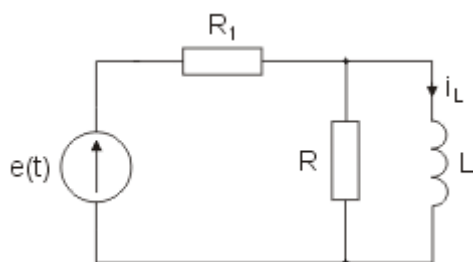
Określić przebieg czasowy prądu cewki w stanie nieustalonym w obwodzie przedstawionym na rys. 11.15. Zastosować metodę klasyczną. Przyjąć następujące wartości parametrów: $R=2\Omega$, $R_1=5\Omega$, $L=2H$, $e(t) = 20\sqrt{2} \sin(t)$



Rys. 11.15. Schemat obwodu do zadania 11.2

Rozwiązanie

Warunki początkowe dotyczą obwodu przedstawionego na rys. 11.16.



Rys. 11.16. Schemat obwodu do wyznaczania warunków początkowych

Stosując do tego obwodu metodę symboliczną otrzymuje się kolejno

$$\omega = 1$$

$$Z_L = j\omega L = j2$$

$$Z_{RL} = \frac{2 \cdot j2}{2 + j2} = 1 + j1$$

$$I_L = E \frac{Z_{RL}}{(R_1 + Z_{RL})Z_L} = 2,32e^{-j54,5^\circ}$$

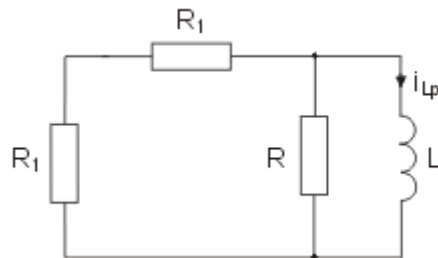
$$i_L(t) = 2,32\sqrt{2} \sin(t - 54,5^\circ)$$

$$i_L(0^-) = -2,67$$

Wobec odłączenia źródła podczas przełączenia stan ustalony w obwodzie po przełączeniu jest zerowy, stąd

$$i_{Lu}(t) = 0 \rightarrow i_{Lu}(0^+) = 0$$

Stan przejściowy dotyczy obwodu z rys. 11.17



Rys. 11.17 Schemat obwodu do wyznaczenia składowej przejściowej

Równanie różniczkowe obwodu:

$$L \frac{di_{Lp}}{dt} + \frac{2R_1 R}{2R_1 + R} i_{Lp} = 0$$

Po wstawieniu wartości liczbowych otrzymuje się

$$\frac{di_{Lp}}{dt} + \frac{5}{6}i_{Lp} = 0$$

Równanie charakterystyczne

$$s + \frac{5}{6} = 0 \rightarrow s_1 = -\frac{5}{6}$$

Rozwiązanie równania różniczkowego

$$i_{Lp}(t) = Ae^{-5/6t}$$

Wobec braku składowej ustalonej rozwiązanie to jest jednocześnie rozwiązaniem pełnym.
Stąd

$$i_L(t) = i_{Lp}(t) = Ae^{-5/6t}$$

Z praw komutacji wynika

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) \rightarrow A = -2,67$$

Rozwiązanie pełne obwodu przyjmuje więc postać

$$i_L(t) = -2,67e^{-5/6t}$$

Lekcja 12. Metoda operatorowa Laplace’a

Wstęp

Opis obwodów elektrycznych w stanie nieustalonym poprzez układ równań różniczkowych jest wygodną formą analizy przy zastosowaniu metod numerycznych. W przypadku analizowania zjawisk zachodzących w tych obwodach z zastosowaniem metod analitycznych metoda ta jest żmudna przy dużej liczbie elementów indukcyjnych i pojemnościowych i stąd jej zastosowanie ograniczone jest praktycznie do rzędu $n=2$. W takich przypadkach znacznie wygodniejsze jest zastosowanie metod operatorowych, z których najważniejsza to metoda operatorowa Laplace’a. Rachunek operatorowy jako alternatywa do metody klasycznej polega na algebraizacji równań różniczkowych opisujących dany obwód. W ten sposób układ równań różniczkowych zostaje zastąpiony układem równań algebraicznych typu funkcyjnego.

Zastosowanie przekształcenia Laplace’a upraszcza operację rozwiązywania równań różniczkowych zastępując ją rozwiązaniem układu równań algebraicznych. Istota przekształcenia Laplace’a polega na tym, że każdej funkcji czasu $f(t)$ określonej dla $t>0$ odpowiada pewna funkcja $F(s)$ określona w dziedzinie liczb zespolonych i odwrotnie, każdej funkcji $F(s)$ odpowiada określona funkcja czasu $f(t)$.

W tej lekcji omówimy podstawy rachunku operatorowego Laplace’a. Przedstawione zostaną definicje przekształcenia prostego i odwrotnego oraz podstawowe własności przekształcenia. Podamy przykłady obliczania transformat prostej i odwrotnej, ilustrujące istotę transformacji Laplace’a.



12.1 Wiadomości podstawowe dotyczące rachunku operatorowego Laplace’a

Zastosowanie przekształcenia Laplace’a upraszcza operację rozwiązywania równań różniczkowych zastępując ją rozwiązaniem układu równań algebraicznych. Istota przekształcenia Laplace’a polega na tym, że każdej funkcji czasu $f(t)$ określonej dla $t>0$ odpowiada pewna funkcja $F(s)$ określona w dziedzinie liczb zespolonych i odwrotnie, każdej funkcji $F(s)$ odpowiada określona funkcja czasu $f(t)$. Funkcję $f(t)$ nazywamy **oryginałem** i oznaczamy małą literą. Funkcję $F(s)$ nazywamy **transformatą** funkcji określoną w dziedzinie

zmiennej zespolonej s i oznaczamy dużą literą. Zmienna s jest nazywana **częstotliwością zespoloną**, przy czym $s = \sigma + j\omega$, gdzie ω oznacza pulsację.

W elektrotechnice najczęściej używane jest jednostronne przekształcenie Laplace'a, określone parą równań:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (12.1)$$

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi \cdot j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (12.2)$$

w których c jest bliżej nieokreśloną stałą warunkującą położenie granic całkowania w obszarze zbieżności transformaty. Pierwsze z równań definiuje **proste przekształcenie** Laplace'a przyporządkowujące oryginałowi transformatę zmiennej zespolonej s , a drugie **przekształcenie odwrotne** dokonujące transformacji odwrotnej, czyli wyznaczające funkcję oryginału na podstawie $F(s)$. Zakładamy przy tym, że funkcja $f(t)$ jest funkcją czasu, zadaną dla $t > 0$ i równą 0 dla $t < 0$ oraz, że nie rośnie szybciej niż funkcja wykładnicza. Proste przekształcenie Laplace'a określone wzorem (12.1) dokonuje transformacji funkcji czasu $f(t)$ na funkcję $F(s)$ zmiennej zespolonej s . Przekształcenie odwrotne określone wzorem (12.2) dokonuje transformacji funkcji zespolonej $F(s)$ na funkcję czasu $f(t)$. Wzór ten pełni jedynie rolę definicji i w praktyce nie używa się go do wyznaczania transformaty odwrotnej, wykorzystując w zamian własności transformat Laplace'a.

Przykład 12.1

Wyznamy z definicji transformatę Laplace'a funkcji stałej $f(t)=A$. Z definicji (12.1) transformaty otrzymuje się

$$F(s) = L\{A\} = A \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[\frac{-A}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{A}{s}$$

Przykład 12.2

Jako drugi przykład wyznaczmy transformatę Laplace'a funkcji wykładniczej $f(t) = e^{at}$, gdzie w ogólności $a = \alpha + j\beta$. Z zastosowania wzoru (12.1) otrzymuje się

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \left[\frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \right]_0^{\infty}$$

Po wstawieniu granic całkowania i założeniu, że $a < s$ (warunek zbieżności ciągu) otrzymuje się

$$L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

Należy podkreślić, że jednostronne przekształcenie Laplace'a jest określone w przedziale od zera do nieskończoności, stąd postać funkcji dla czasu ujemnego nie ma żadnego wpływu na transformatę Laplace'a.

Na przykład funkcja stała $f(t)=1$ oraz **funkcja skoku jednostkowego** $f(t)=1(t)$ (funkcja skokowa Heaviside'a) określona wzorem

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \geq 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases} \quad (12.3)$$

mają identyczne transformaty Laplace'a, pomimo tego że dla $t < 0$ są inne (pierwsza równa 1 a druga równa 0) gdyż w zakresie czasowym od zera do nieskończoności nie różnią się niczym.

Jakkolwiek definicja przekształcenia Laplace'a umożliwia obliczenie transformaty dla dowolnej funkcji czasu, w obliczeniach inżynierskich posługujemy się najczęściej tablicami transformat Laplace'a zebranymi w poradnikach matematycznych, wykorzystując przy tym podstawowe własności tego przekształcenia.

12.2 Podstawowe własności przekształcenia Laplace'a.

Z wielu istniejących własności przekształcenia Laplace'a ograniczymy się tutaj do kilku podstawowych, których znajomość jest konieczna do określenia stanów nieustalonych w obwodach RLC.

12.2.1 Liniowość przekształcenia

Jeśli współczynniki a_1 i a_2 są dowolnymi stałymi to

$$L[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s) \quad (12.4)$$

$$L^{-1}[a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)] = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \quad (12.5)$$

gdzie symbole L i L^{-1} oznaczają odpowiednio transformaty: prostą i odwrotną Laplace'a. Z własności liniowości przekształcenia wynika, że przekształcenie Laplace'a spełnia zasadę superpozycji.

Przykład 12.3

Dla zilustrowania użyteczności twierdzenia o liniowości przekształcenia Laplace'a zastosujemy je do obliczenia transformaty funkcji $\cos(\omega t)$. Korzystając z definicji funkcji cosinusoidalnej otrzymuje się

$$L\{\cos(\omega t)\} = L\left\{\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right\}$$

Skorzystamy tutaj z wyprowadzonego wcześniej wzoru na transformatę funkcji wykładniczej. Podstawiając do odpowiedniego wzoru i stosując zasadę superpozycji otrzymuje się

$$L\{\cos(\omega t)\} = \frac{1}{2}L\{e^{j\omega t}\} + \frac{1}{2}L\{e^{-j\omega t}\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega}\right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

12.2.2 Transformata pochodnej funkcji czasu

Transformata pochodnej funkcji czasu spełnia relację

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+) \quad (12.6)$$

W której $f(0^+)$ oznacza wartość początkową funkcji $f(t)$. Mnożenie funkcji $F(s)$ przez zmienną zespoloną s odpowiada w dziedzinie czasu różniczkowaniu funkcji. Stąd operator s nazywany jest operatorem różniczkowania.

12.2.3 Transformata całki funkcji czasu

Transformata całki funkcji czasu spełnia relację

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} \quad (12.7)$$

Pomnożenie funkcji $F(s)$ przez $1/s$ odpowiada w dziedzinie czasu całkowaniu funkcji. Stąd operator s^{-1} jest nazywany również operatorem całkowania.

12.2.4 Przesunięcie w dziedzinie częstotliwości

Rozważmy przesunięcie argumentu funkcji operatorowej Laplace'a. Oznacza to, że zamiast transformaty $F(s)$ bierzemy pod uwagę funkcję $F(s-a)$. Twierdzenie o przesunięciu argumentu zmiennej zespolonej s mówi, że spełniona jest wówczas zależność

$$L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a) \quad (12.8)$$

Przesunięcie argumentu zespolonego s transformaty o wartość a odpowiada w dziedzinie czasu pomnożeniu funkcji oryginału przez funkcję wykładniczą e^{at} . Korzyści płynące z powyższej własności zademonstrujemy na przykładzie wyznaczania transformaty odwrotnej Laplace'a funkcji o przesuniętym argumencie s .

Przykład 12.4

Należy wyznaczyć odwrotną transformatę Laplace'a funkcji $F(s)$ zadanej w postaci

$$F(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 9}$$

W rozwiązaniu problemu wykorzystamy ostatnią własność przekształcenia w odniesieniu do funkcji rozważanej w przykładzie 12.3. Zgodnie z wynikami uzyskanymi w tym przykładzie

mamy $L\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$ przy wartości $\omega = 3$. Wprowadzając przesunięcie o wartość $a = 2$

w dziedzinie zmiennej zespolonej s uzyskuje się zadaną w tym przykładzie funkcję operatorową Laplace'a. Oznacza to, że jej transformata odwrotna odpowiada funkcji $e^{-at} \cos(\omega t)$. Stąd transformata odwrotna funkcji zadanej w przykładzie wynosi

$$L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2 + 3^2}\right\} = e^{-2t} \cos(3t)$$

Twierdzenie o przesunięciu pozwoliło uzyskać transformatę odwrotną Laplace'a bez konieczności wykonywania operacji całkowania zadanej w definicji przekształcenia odwrotnego.

12.2.5 Przesunięcie w dziedzinie czasu

Transformata Laplace'a funkcji czasu o argumencie przesuniętym względem początku układu współrzędnych spełnia następującą zależność

$$L[f(t-a) \cdot 1(t-a)] = e^{-as} F(s) \quad (12.9)$$

Przesunięcie argumentu funkcji oryginalnej $f(t)$ w dziedzinie czasu $f(t) \rightarrow f(t-a)$ odpowiada w dziedzinie częstotliwości pomnożeniu transformaty Laplace'a funkcji oryginalnej $F(s)$ (nieprzesuniętej) przez funkcję wykładniczą e^{-as} .

Własność powyższa jest często wykorzystywana przy obliczaniu transformat nietypowych funkcji jak również przy analizie obwodów o wymuszeniach impulsowych.

Tutaj zilustrujemy jej użyteczność przy obliczaniu transformaty impulsu Diraca, zwanej **funkcją impulsową Diraca**. Impulsem Diraca nazywamy wielkość $\delta(t)$ o następujących własnościach.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq 0 \\ \infty & \text{dla } t = 0 \end{cases} \quad (12.10)$$

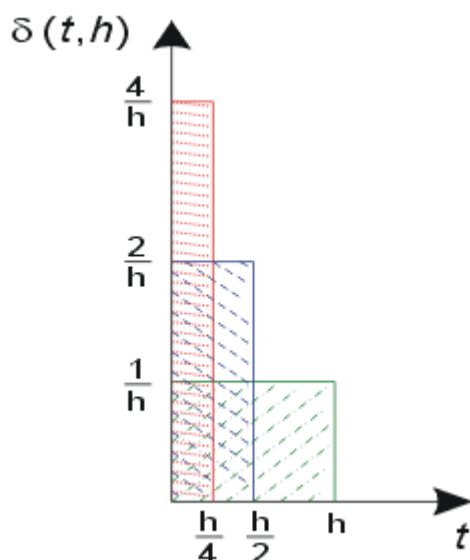
oraz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (12.11)$$

Impuls Diraca przyjmuje wartość nieskończoną tylko dla jednego punktu $t=0$ a w pozostałym zakresie ma wartość zerową. Wartość nieskończona stwarza pewne trudności obliczeniowe. Aby je przezwyciężyć wprowadza się jej aproksymację w postaci

$$\delta(t, h) = \frac{1}{h} [1(t) - 1(t-h)] \quad (12.12)$$

której wykres dla różnych wartości h przedstawiony jest na rys. 12.1.



Rys. 12.1. Aproksymacja funkcji Diraca przez funkcję impulsową



Im mniejsza wartość h tym bardziej funkcja aproksymująca zbliża się swym wyglądem do funkcji Diraca. W granicy przy $h \rightarrow 0$ funkcja aproksymująca jest zbieżna do rzeczywistej funkcji Diraca. Transformata Laplace'a dla funkcji aproksymującej jest dana w postaci

$$L\{\delta(t, h)\} = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sh} \right] \quad (12.13)$$

Biorąc pod uwagę, że delta Diraca jest granicą funkcji aproksymującej otrzymuje się

$$L\{\delta(t)\} = \lim_{h \rightarrow 0} L\{\delta(t, h)\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sh} \right] = 1 \quad (12.14)$$

Transformata Laplace'a funkcji delty Diraca jest równa jedności.

12.2.6 Transformata splotu

Splot stanowi ważne pojęcie w teorii obwodów, gdyż za jego pośrednictwem określa się odpowiedzi czasowe obwodów rzeczywistych RLC. Splot dwu funkcji czasu $f_1(t)$ i $f_2(t)$ oznaczony w postaci $f_1(t) * f_2(t)$ jest zdefiniowany w następujący sposób

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \quad (12.15)$$

Transformata Laplace'a splotu jest równa zwykłemu iloczynowi transformat poszczególnych funkcji tworzących splot

$$L[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s) \quad (12.16)$$

Powyższa własność nosi w matematyce nazwę twierdzenia Borela. Zauważmy, że mnożenie splotowe dwu funkcji w dziedzinie czasu odpowiada zwykłemu mnożeniu ich transformat w dziedzinie częstotliwości. Własność ta jest szczególnie wygodna w analizie obwodów zarówno w stanie ustalonym jak i nieustalonym. Zamiast żmudnych operacji w dziedzinie

czasu wykonuje się transformację Laplace’a funkcji czasowych a następnie wszystkie operacje wykonuje na transformatach.

12.3 Przykłady transformat Laplace’a

Obliczanie transformat Laplace’a polega na zastosowaniu wzoru (12.1) przy zadanej funkcji oryginału i przeprowadzeniu działań w nim określonych (całkowanie funkcji i wyznaczenie wartości na granicach całkowania). Przykłady wyznaczania transformaty Laplace’a dla funkcji impulsowej Diraca, wartości stałej, funkcji wykładniczej i cosinusoidalnej zostały zaprezentowane na początku tej lekcji.

Obliczanie transformat dla większości funkcji, zwłaszcza bardziej złożonych, nie jest procesem łatwym i dlatego w praktyce inżynierskiej najczęściej posługujemy się tablicami gotowych transformat Laplace’a, których źródło znaleźć można w wielu poradnikach matematycznych jak również podręcznikach poświęconych rachunkowi operatorowemu. W tablicy 12.1 zestawiono wybrane przykłady transformat Laplace’a szczególnie często wykorzystywanych przy rozwiązywaniu stanów nieustalonych w obwodach RLC. W dalszej części tej lekcji będą one wykorzystane do wyznaczania transformat odwrotnych Laplace’a (funkcji czasu odpowiadających transformatom).

Tablica 12.1 Tablica wybranych transformat Laplace’a

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
1(t)	$\frac{1}{s}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$

$e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
--------------------------------	--

Zawartość tablicy przedstawiająca zbiór funkcji czasu wraz z odpowiadającymi im transformacjami może służyć zarówno wyznaczaniu transformaty Laplace'a przy zadanej funkcji czasu jak i działaniu odwrotnemu, to jest wyznaczeniu oryginału na podstawie zadanej postaci transformaty. Przykładowo, jeśli transformata dana jest wzorem

$$F(s) = 15 \frac{5}{(s+2)^2 + 5^2}$$

to odpowiadająca mu funkcja oryginału odczytana z tablicy 12.1 ma postać

$$f(t) = 15e^{-2t} \sin(5t).$$

W dalszej części rozważań podamy rozwinięcie tej metody pozwalające na wyznaczenie transformaty odwrotnej dla dowolnej postaci funkcji wymiernej $F(s)$ korzystając z tablicy 12.1.

12.4 Wyznaczanie odwrotnej transformaty Laplace'a

Aby wyznaczyć funkcję czasu $f(t)$ na podstawie danej transformaty należy dokonać odwrotnego przekształcenia Laplace'a. Zależność definicyjna określona wzorem (12.2) jest raczej bezużyteczna ze względu na konieczność całkowania złożonych zwykle funkcji, jak również na nieokreślone precyzyjnie granice całkowania (stała c w definicji nie jest dokładnie określona). Najczęściej korzysta się z pośrednich metod wyznaczania oryginału wynikających z własności samego przekształcenia. Niezależnie od metody zastosowanej do wyznaczenia oryginału, zakładamy będziemy, że transformata Laplace'a zadana jest w postaci wymiernej, czyli ilorazu dwu wielomianów zmiennej zespolonej s o współczynnikach rzeczywistych.

$$F(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (12.17)$$

Dodatkowo przyjmujemy, że stopień licznika jest mniejszy niż stopień mianownika. Jeśli warunek powyższy byłby niespełniony, należy podzielić licznik przez mianownik tak, aby wymusić spełnienie tego warunku. Sposób postępowania w takim przypadku zilustrujemy na przykładzie.

Przykład 12.5

Dana jest transformata $F(s)$ o postaci

$$F(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 3s + 5}{s^2 + s + 4}$$

Dzieląc licznik przez mianownik według najwyższych potęg otrzymuje się rozwinięcie funkcji na sumę dwu składników potęgowych zmiennej s oraz funkcję wymierną spełniającą warunek, że stopień licznika jest mniejszy niż stopień mianownika

$$F(s) = 2s - 1 + \frac{-4s + 9}{s^2 + s + 4}$$

Przy obliczaniu transformaty odwrotnej powyższej zależności tylko ostatni (złożony) składnik wymaga specjalnego postępowania. Składnik stały (-1) odpowiada funkcji impulsowej Diraca a funkcja $2s$ odpowiadać będzie wartości pochodnej funkcji Diraca pomnożonej przez dwa.

Istnieje wiele metod obliczania transformaty odwrotnej Laplace'a, wykorzystujących własności przekształcenia. Do najbardziej popularnych należą metoda residuów, rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste, metoda Heaviside'a oraz metoda bazująca na wykorzystaniu tablic transformat Laplace'a. Tutaj ograniczymy się do dwu najbardziej uniwersalnych metod: metody residuów oraz metody tablicowej wykorzystującej tablice transformat Laplace'a.

12.4.1 Metoda residuów

Założmy, że funkcja wymierna $F(s)$ zadana jest w postaci ilorazu dwu wielomianów zmiennej zespolonej s , określona wzorem (12.17)

$$F(s) = \frac{L(s)}{M(s)} \quad (12.18)$$

Pierwiastki licznika funkcji transformaty są nazywane **zerami** a pierwiastki mianownika **biegunami**. Zauważmy, że bieguny są utożsamiane z pierwiastkami równania charakterystycznego występującego w metodzie klasycznej lub metodzie wartościami własnymi macierzy stanu **A**. W metodzie residuów korzysta się z następującego twierdzenia.

Twierdzenie

Jeżeli funkcja $F(s)$ jest ilorazem dwu wielomianów $L(s)$ i $M(s)$, przy czym stopień wielomianu mianownika jest wyższy niż stopień wielomianu licznika ($n > m$) to oryginał funkcji $f(t)$ określony jest następującym wzorem

$$L^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^n \text{res}_{s=s_i} [F(s)e^{st}] \quad (12.19)$$

Sumowanie odbywa się po wszystkich biegunach funkcji operatorowej $F(s)$ niezależnie od tego, czy bieguny są pojedyncze czy wielokrotne.

Residuum funkcji $\text{res}[\circ]$ wyznacza się korzystając ze wzorów wynikających z własności przekształcenia Laplace'a. W przypadku bieguna l -krotnego wzór jest następujący

$$\text{res}_{s=s_i} [F(s)e^{st}] = \frac{1}{(l-1)!} \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{d^{(l-1)}}{ds^{l-1}} [F(s)(s-s_i)^l e^{st}] \quad (12.20)$$

Szczególnie proste zależności otrzymuje się dla bieguna jednokrotnego s_i . W takim przypadku $l=1$ i wzór na residuum ulega znacznemu uproszczeniu

$$\text{res}_{s=s_i} [F(s)e^{st}] = \lim_{s \rightarrow s_i} [F(s)(s-s_i)e^{st}] \quad (12.21)$$

Wzór (12.19) wykorzystujący residuum funkcji jest stosowalny dla dowolnych biegunów funkcji $F(s)$, w tym biegunów rzeczywistych, zespolonych, jednokrotnych i wielokrotnych. Jednakże przy biegunach zespolonych obliczenie residuum jest procesem dość złożonym i metoda nie jest konkurencyjna względem innych.

Przykład 12.6

Jako pierwszy przykład rozpatrzmy wyznaczenie transformaty odwrotnej Laplace'a funkcji

$F(s)$ danej wzorem

$$F(s) = \frac{5s}{(s+1)(s+3)}$$

Zadana funkcja ma dwa bieguny: $s_1 = -1$ oraz $s_2 = -3$. Wykorzystując wzór (12.19) otrzymuje się

$$f(t) = \operatorname{res}_{s=s_1} [F(s)e^{st}] + \operatorname{res}_{s=s_2} [F(s)e^{st}]$$

Na podstawie wzoru (12.21) otrzymuje się

$$f(t) = \lim_{s \rightarrow s_1} [F(s)(s+1)e^{st}] + \lim_{s \rightarrow s_2} [F(s)(s+3)e^{st}] = \frac{5 \cdot (-1)}{(-1+3)} e^{-1t} + \frac{5 \cdot (-3)}{(-3+1)} e^{-3t} = -2,5e^{-t} + 7,5e^{-3t}$$

Przykład 12.7

Funkcja operatorowa $F(s)$ dana jest wzorem

$$F(s) = \frac{10}{(s+3)^2(s+4)}$$

Występują 3 bieguny funkcji, z których jeden jest pojedynczy a dwa pozostałe równe sobie (jeden biegun podwójny): $s_1=s_2=-3$, $s_3=-4$. Wykorzystując wzory (12.20) i (12.21) otrzymuje się następujący schemat obliczeń

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{res}_{s=s_1=s_2} [F(s)e^{st}] + \operatorname{res}_{s=s_3} [F(s)e^{st}] = \\ &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \rightarrow -3} \frac{d}{ds} [F(s)(s+3)^2 e^{st}] + \lim_{s \rightarrow -4} [F(s)(s+4)e^{st}] = \\ &= \lim_{s \rightarrow -3} \frac{d}{ds} \left[\frac{10}{s+4} e^{st} \right] + \lim_{s \rightarrow -4} \left[\frac{10}{(s+3)^2} e^{st} \right] = 10[t e^{-3t} - e^{-3t}] + 10e^{-4t} \end{aligned}$$

12.4.2 Metoda wykorzystująca tablice transformat

Metoda residuów jakkolwiek koncepcyjnie bardzo prosta staje się żmudna, jeśli bieguny układu są zespolone. Jest to szczególnie widoczne przy wysokich stopniach mianownika transmitancji operatorowej. W takich przypadkach zwykle korzystniejsze jest zastosowanie metody wykorzystującej tablice transformat Laplace'a.

Przy korzystaniu z tablic transformat należy poprzez elementarne przekształcenia doprowadzić daną transformatę do postaci standardowej znajdującej się w tablicy transformat (u nas tablica 12.1) a następnie odczytać z niej oryginał. Jest ona szczególnie wygodna jeśli bieguny układu są zespolone, gdyż w procesie przekształcania transformaty nie występuje potrzeba wyznaczania tych biegunów a wszystkie obliczenia dokonywane są na wartościach rzeczywistych. W praktyce przy stosowaniu tej metody transmitancję wyższych rzędów ($n > 2$) rozkłada się na składniki rzędu drugiego i wszystkie przekształcenia dokonuje na wielomianach rzędu pierwszego lub drugiego. Idę metody wyjaśnimy na przykładach liczbowych

Przykład 12.8

Obliczyć transformatę odwrotną Laplace'a dla funkcji $F(s)$ danej w postaci

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Wobec zespolonych pierwiastków mianownika wykorzystamy tablicę transformat 12.1. Porównanie postaci danej transformaty z danymi zawartymi w tablicy wskazuje, że należy ją doprowadzić do postaci transformaty odpowiadającej funkcji sinusoidalnej tłumionej wykładniczo (wiersz 6 w tablicy). Kolejność czynności jest tu następująca

$$F(s) = \sqrt{4/3} \frac{\sqrt{3/4}}{(s + 0,5)^2 + (\sqrt{3/4})^2}$$

Porównanie tej postaci z wierszem szóstym tablicy 12.1 pokazuje, że $\alpha = 0,5$ a $\omega = \sqrt{3/4}$. Funkcja oryginału jest więc określona wzorem

$$f(t) = \sqrt{4/3} e^{-0,5t} \sin(\sqrt{3/4}t)$$

Przykład 12.9

Jako przykład drugi rozpatrzmy transformatę trzeciego rzędu o biegunach zespolonych.

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s^2+2s+10)}$$

W tym przypadku przed zastosowaniem metody tablicowej należy najpierw rozłożyć funkcję zadaną na składniki o rzędach nie większych niż drugi. Ogólną postać rozkładu zapiszemy w następującej formie

$$F(s) = \frac{A}{(s+1)} + \frac{Bs+C}{(s^2+2s+10)}$$

Współczynniki A , B i C rozkładu należy wyznaczyć w taki sposób, aby obie strony zależności równały się sobie. Współczynnik A można wyznaczyć stosując metodę residuum, zgodnie z którą

$$A = \operatorname{res}_{s=-1} F(s) = \lim_{s \rightarrow -1} F(s)(s+1) = \frac{2}{9}$$

Wobec zespolonych wartości biegunów drugiego składnika rozkładu współczynniki B i C najlepiej jest wyznaczyć jako różnicę funkcji zadanej $F(s)$ i składnika pierwszego rzędu, to jest

$$\frac{Bs+C}{(s^2+2s+10)} = \frac{s+3}{(s+1)(s^2+2s+10)} - \frac{2/9}{(s+1)} = \frac{-2}{9} \frac{s+7/2}{s^2+2s+10}$$

Stąd funkcja zadana $F(s)$ może być zapisana w postaci

$$F(s) = \frac{2/9}{(s+1)} - \frac{2}{9} \frac{s+7/2}{s^2+2s+10}$$

Ze względu na liniowość przekształcenia Laplace'a transformata odwrotna sumy jest równa sumie transformat odwrotnych każdego składnika oddzielnie. Pierwszy składnik sumy odpowiada trzeciemu wierszowi tablicy 12.1. Stąd

$$L^{-1}\left\{\frac{2/9}{(s+1)}\right\} = \frac{2}{9}e^{-t}$$

Składnik drugi wymaga wykonania wstępnych przekształceń doprowadzających jego postać do wierszy szóstego i siódmego tablicy 12.1. W efekcie tych przekształceń otrzymuje się

$$-\frac{2}{9} \frac{s+7/2}{s^2+2s+10} = -\frac{2}{9} \frac{(s+1)+3 \cdot 5/6}{(s+1)^2+3^2} = -\frac{2}{9} \frac{(s+1)}{(s+1)^2+3^2} - \frac{5}{27} \frac{3}{(s+1)^2+3^2}$$

Transformata odwrotna tego wyrażenia może być zatem zapisana w postaci

$$L^{-1}\left\{-\frac{2}{9} \frac{s+7/2}{s^2+2s+10}\right\} = L^{-1}\left\{-\frac{2}{9} \frac{(s+1)}{(s+1)^2+3^2} - \frac{5}{27} \frac{3}{(s+1)^2+3^2}\right\} = \\ -\frac{2}{9}e^{-t} \cos(3t) - \frac{5}{27}e^{-t} \sin(3t)$$

Stąd na mocy twierdzenia o liniowości transformata odwrotna Laplace'a zadanej funkcji $F(s)$ jest sumą transformat odwrotnych obu składników rozkładu

$$L^{-1}\{F(s)\} = \frac{2}{9}e^{-t} - \frac{2}{9}e^{-t} \cos(3t) - \frac{5}{27}e^{-t} \sin(3t)$$

Zadania sprawdzające

Zadanie 12.1

Wyznaczyć transformatę odwrotną Laplace'a dla transmitancji operatorowej $F(s)$

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

Rozwiązanie

W rozważanym przypadku wszystkie bieguny są rzeczywiste i pojedyncze. Ich wartości są równe: $s_1=-1$, $s_2=-2$, $s_3=-5$. Najskuteczniejszą metodą pozostaje w tym przypadku metoda residuów, zgodnie z którą

$$f(t) = \text{res}_{s \rightarrow -1} F(s)e^{st} + \text{res}_{s \rightarrow -2} F(s)e^{st} + \text{res}_{s \rightarrow -5} F(s)e^{st}$$

Wartość funkcji residuum dla poszczególnych biegunów jest równa

$$\text{res}_{s \rightarrow -1} F(s)e^{st} = \lim_{s \rightarrow -1} F(s)(s+1)e^{st} = \frac{1}{4}e^{-t}$$

$$\text{res}_{s \rightarrow -2} F(s)e^{st} = \lim_{s \rightarrow -2} F(s)(s+2)e^{st} = -\frac{1}{3}e^{-2t}$$

$$\text{res}_{s \rightarrow -5} F(s)e^{st} = \lim_{s \rightarrow -5} F(s)(s+5)e^{st} = \frac{1}{12}e^{-5t}$$

Sumując poszczególne składniki otrzymujemy

$$f(t) = \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{12}e^{-5t}$$

Zadanie 12.2

Wyznaczyć transformatę odwrotną Laplace'a dla transmitancji operatorowej $F(s)$

$$F(s) = \frac{s}{(s+2)(s+3)(s+5)^2}$$

Rozwiązanie

W rozważanym przypadku wszystkie bieguny są rzeczywiste, przy czym jeden z nich jest podwójny. Ich wartości są równe: $s_1=-2$, $s_2=-3$, $s_3=s_4=-5$. Najskuteczniejszą metodą pozostaje w tym przypadku metoda residuów, zgodnie z którą

$$f(t) = \operatorname{res}_{s \rightarrow -2} F(s)e^{st} + \operatorname{res}_{s \rightarrow -3} F(s)e^{st} + \operatorname{res}_{s \rightarrow -5} F(s)e^{st}$$

Wartość funkcji residuum dla poszczególnych biegunów jest równa

$$\operatorname{res}_{s \rightarrow -2} F(s)e^{st} = \lim_{s \rightarrow -2} F(s)(s+2)e^{st} = -\frac{2}{9}e^{-2t}$$

$$\operatorname{res}_{s \rightarrow -3} F(s)e^{st} = \lim_{s \rightarrow -3} F(s)(s+3)e^{st} = \frac{3}{4}e^{-3t}$$

$$\operatorname{res}_{s \rightarrow -5} F(s)e^{st} = \lim_{s \rightarrow -5} \frac{d}{ds} (F(s)(s+5)^2 e^{st}) = -\frac{19}{36}e^{-5t} - \frac{5}{6}te^{-5t}$$

Sumując poszczególne składniki otrzymujemy

$$f(t) = -\frac{2}{9}e^{-2t} + \frac{3}{4}e^{-3t} - \frac{19}{36}e^{-5t} - \frac{5}{6}te^{-5t}$$

Zadanie 12.3

Wyznaczyć transformatę odwrotną Laplace'a dla transmitancji operatorowej

$$F(s) = \frac{s+2}{(s^2+s+10)}$$

Rozwiązanie

W rozważanym przypadku mamy do czynienia z biegunami zespolonymi, stąd przy wyznaczaniu transformaty odwrotnej Laplace'a wygodniejsza jest metoda wykorzystująca tablice transformat. W tym celu przekształcimy wyrażenie transformaty do postaci

$$F(s) = \frac{s+2}{(s^2+s+10)} = \frac{(s+0,5) + 1,5 \cdot \sqrt{4/39} \cdot \sqrt{39/4}}{(s+0,5)^2 + (\sqrt{39/4})^2}$$

Z porównania szóstego i siódmego wiersza w tablicy 12.1 z wyrażeniem opisującym zadaną transformatę otrzymuje się

$$f(t) = e^{-0,5t} \cos(\sqrt{39/4}t) + \frac{3}{\sqrt{39}} e^{-0,5t} \sin(\sqrt{39/4}t)$$

Lekcja 13. Metoda operatorowa analizy stanów nieustalonych w obwodach elektrycznych

Wstęp

W metodzie operatorowej Laplace'a zastępuje się układ równań różniczkowych poprzez układ równań algebraicznych zmiennej zespolonej s . Jakkolwiek bezpośrednie zastosowanie transformacji Laplace'a do równań różniczkowych opisujących obwód elektryczny pozwala uzyskać opis obwodu w dziedzinie operatorowej, najlepszą metodą analizy obwodów w stanie nieustalonym przy zastosowaniu przekształcenia Laplace'a jest określenie transformat prądów i napięć bezpośrednio na podstawie obwodu bez konieczności układania równań różniczkowo-całkowych.

W tej lekcji wprowadzimy metodę operatorową Laplace'a do analizy stanu nieustalonego w obwodzie RLC bezpośrednio na podstawie struktury obwodu bez stosowania równań różniczkowych. Podamy modele operatorowe rezystora, cewki i kondensatora. Zostanie wprowadzona metoda superpozycji stanów ustalonego i przejściowego rozdzielająca analizę obwodu w stanie ustalonym po przełączeniu od analizy w stanie przejściowym. Zaletą takiego podejścia jest znaczne uproszczenie obliczeń, zwłaszcza przy wystąpieniu źródeł sinusoidalnych.



13.1 Modele operatorowe elementów obwodu

Aby uzyskać bezpośrednie przetworzenie postaci oryginalnej obwodu na obwód w dziedzinie operatorowej Laplace'a należy każdy element obwodu zastąpić odpowiednim modelem w dziedzinie operatorowej. Tutaj podamy te modele dla trzech podstawowych elementów obwodu RLC.

13.1.1 Rezystor

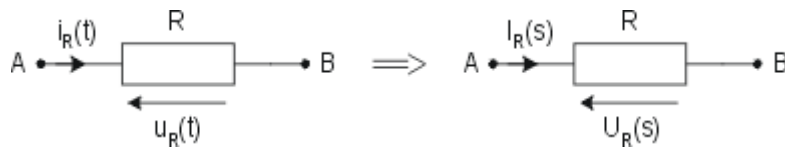
Prawo Ohma dotyczące wartości chwilowych prądu i napięcia dla rezystora można zapisać w postaci

$$u_R(t) = Ri_R(t) \quad (13.1)$$

Jest to równanie algebraiczne wiążące prąd i napięcie na zaciskach elementu. Stosując transformację Laplace'a do obu stron równania otrzymuje się

$$U_R(s) = RI_R(s) \quad (13.2)$$

Jak wynika z powyższej zależności impedancja operatorowa dla rezystora jest równa samej rezystancji $Z_R(s) = R$. Rys. 13.1 przedstawia model operatorowy rezystora, obowiązujący w dziedzinie zmiennej zespolonej s .



Rys. 13.1. Model operatorowy rezystora

13.1.2 Cewka

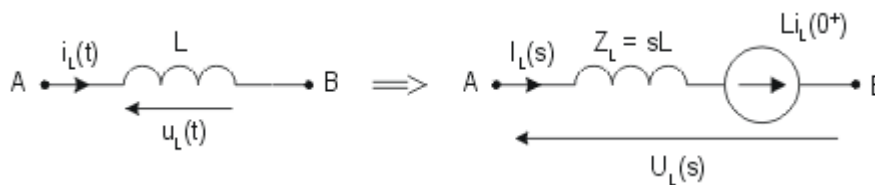
Dla uzyskania modelu operatorowego cewki idealnej zastosujemy przekształcenie Laplace'a bezpośrednio do równania opisującego cewkę w dziedzinie czasu

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (13.3)$$

i wykorzystamy własność dotyczącą transformaty pochodnej. W efekcie otrzymuje się

$$U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^+) \quad (13.4)$$

Powyższemu równaniu można przyporządkować schemat obwodowy cewki w dziedzinie operatorowej przedstawiony na rys. 13.2



Rys.13.2 Model operatorowy cewki idealnej



Jest to połączenie szeregowe impedancji operatorowej odpowiadającej cewce idealnej i źródła napięciowego. Zaciski A-B modelu odpowiadają zaciskom A-B w oryginalnym symbolu cewki. Impedancja $Z_L(s) = sL$ jest impedancją operatorową cewki a $Li_L(0^+)$ reprezentuje źródło napięcia stanowiące integralną część modelu.

13.1.3 Kondensator

Dla uzyskania modelu operatorowego kondensatora idealnego skorzystamy z jego opisu w dziedzinie czasu

$$i_c(t) = C \frac{du_c}{dt} \quad (13.5)$$

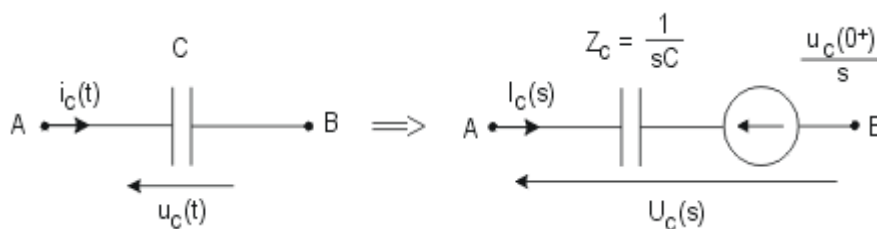
Zastosujemy przekształcenie Laplace'a do obu stron równania kondensatora. W efekcie takiej operacji otrzymuje się

$$I_C(s) = sCU_C(s) - Cu_C(0^+) \quad (13.6)$$

Przepiszemy tę zależność w postaci

$$U(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{u_c(0^+)}{s} \quad (13.7)$$

Równaniu powyższemu można przyporządkować schemat operatorowy kondensatora przedstawiony na rys. 13.3.



Rys. 13.3 Model operatorowy kondensatora idealnego



W modelu tym funkcja $Z_c = \frac{1}{sC}$ reprezentuje impedancję operatorową kondensatora a $\frac{u_c(0^+)}{s}$ - źródło napięciowe stanowiące integralną część modelu.

Modele operatorowe odpowiadające podstawowym elementom obwodu pozwalają przyporządkować każdemu obwodowi rzeczywistemu jego schemat zastępczy w dziedzinie transformat. W schemacie tym niezerowe warunki początkowe uwzględnione są poprzez dodatkowe źródła napięcia występujące w modelu operatorowym cewki i kondensatora. Taki sposób podejścia do analizy stanu nieustalonego jest wygodny ze względu na to, że umożliwia napisanie równań (algebraicznych, funkcyjnych) w postaci operatorowej bezpośrednio na podstawie schematu zastępczego bez potrzeby tworzenia równań różniczkowych opisujących obwód.

13.2 Prawa Kirchhoffa dla transformat

Dla schematu operatorowego obwodu słuszne są prawa Kirchhoffa, analogiczne do praw obowiązujących w dziedzinie czasu.

Prawo prądowe

Suma transformat prądów w dowolnym węźle obwodu elektrycznego jest równa zero

$$\sum_{k=1}^n I_k(s) = 0 \quad (13.8)$$

Prawo napięciowe

Suma transformat napięć gałęziowych w dowolnym oczku obwodu elektrycznego jest równa zero

$$\sum_{k=1}^n U_k(s) = 0 \quad (13.9)$$

W równaniach tych transformaty prądów i napięć zastąpiły wartości czasowe występujące w podstawowej wersji praw Kirchhoffa. Znaki prądów i napięć występujących w równaniach (13.8) i (13.9) ustalane są w identyczny sposób jak w przypadku podstawowej wersji praw Kirchhoffa podanych dla wielkości rzeczywistych.

13.3 Obliczenia prądów i napięć w obwodzie metodą operatorową

Obliczenia prądów i napięć w stanie nieustalonym obwodu metodą operatorową sprowadzać się będą do wyznaczenia transformaty odpowiedniej wielkości a następnie obliczenia transformaty odwrotnej Laplace'a dla określenia zmiennej w dziedzinie czasu. Do obliczenia transformat prądów i napięć można stosować wszystkie poznane dotąd metody analizy obwodów, w tym metodę równań Kirchhoffa, oczkową, potencjałów węzłowych, Thevenina i Nortona operujące transformatami Laplace'a zamiast wartościami zespolonymi czy wartościami w dziedzinie czasu (dla obwodu rezystancyjnego).

Podstawowymi zaletami metody operatorowej jest łatwość uwzględnienia niezerowych warunków początkowych (przez wprowadzenie źródeł napięciowych w modelu operatorowym) oraz sprowadzenie operacji różniczkowych do działań algebraicznych.

W ogólności rozwiązując stan nieustalony w obwodzie metodą operatorową należy wyróżnić kilka etapów.

1. Określenie warunków początkowych w obwodzie, poprzez wyznaczenie rozwiązania ustalonego obwodu przed przełączeniem i obliczenie wartości napięć na kondensatorach i prądów cewek w chwili $t = 0^-$, to jest $i_L(0^-)$ oraz $u_C(0^-)$
2. Określenie rozwiązania obwodu w stanie ustalonym po przełączeniu przy zastosowaniu metody symbolicznej z wykorzystaniem dowolnej metody analizy. Wynikiem jest postać czasowa rozwiązania ustalonego prądów cewek $i_{Lu}(t)$ i napięć kondensatorów $u_{Cu}(t)$.

Przez założenie $t=0$ otrzymuje się wartości prądów i napięć w chwili początkowej, to jest $i_{Lu}(0^+)$ oraz $u_{Cu}(0^+)$.

3. Określenie rozwiązania obwodu w stanie przejściowym po przełączeniu przy zastosowaniu metody operatorowej. Dla otrzymania takiego rozwiązania należy wykonać następujące etapy:

- utworzenie schematu obwodu dla składowej przejściowej poprzez wyeliminowanie źródeł zewnętrznych wymuszających (zwarcie źródeł napięcia i rozwarcie źródeł prądu); obwód rzeczywisty dla składowej przejściowej w dziedzinie czasu nie zawiera żadnych źródeł wymuszających
- określenie warunków początkowych dla składowej przejściowej przy wykorzystaniu praw komutacji, zgodnie z którymi $x(0^-) = x_u(0^+) + x_p(0^+)$; z równania tego wynikają następujące wzory na warunki początkowe dla składowych przejściowych prądu cewki i napięcia kondensatora

$$i_{Lp}(0^+) = i_L(0^-) - i_{Lu}(0^+) \quad (13.10)$$

$$u_{Cp}(0^+) = u_C(0^-) - u_{Cu}(0^+) \quad (13.11)$$

- utworzenie schematu operatorowego obwodu w stanie przejściowym poprzez zastąpienie elementów rzeczywistych obwodu ich modelami operatorowymi dla składowej przejściowej i rozwiązanie obwodu względem poszukiwanych prądów i napięć operatorowych
 - wyznaczenie transformaty odwrotnej Laplace'a dla poszukiwanych wielkości przejściowych określonych w punkcie poprzednim; w wyniku otrzymuje się $i_{Lp}(t)$ oraz $u_{Cp}(t)$.
4. Rozwiązanie obwodu w stanie nieustalonym jest sumą składowej ustalonej oraz składowej przejściowej, to jest

$$i_L(t) = i_{Lu}(t) + i_{Lp}(t) \quad (13.12)$$

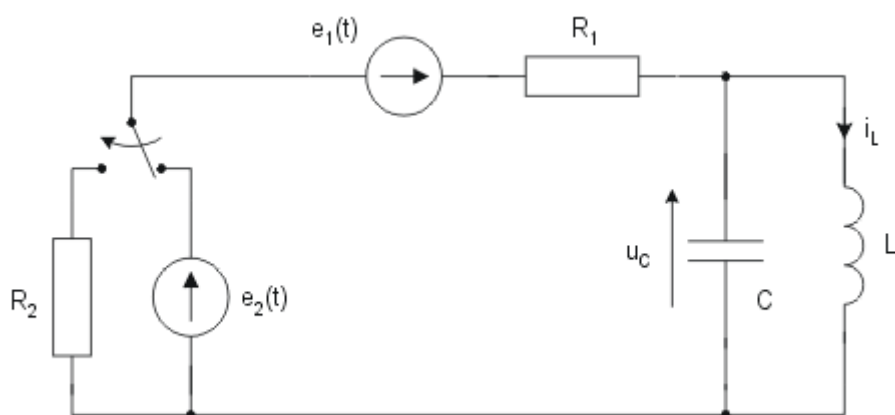
$$u_C(t) = u_{Cu}(t) + u_{Cp}(t) \quad (13.13)$$

Składowa przejściowa zanika z czasem do zera i pozostaje jedynie składowa ustalona określająca przebieg wielkości w stanie ustalonym. Taka metodyka rozwiązywania stanów nieustalonych przy zastosowaniu transformacji Laplace'a nosi nazwę metody **superpozycji stanów**, gdyż rozdziela w sposób jawny stan ustalony od stanu przejściowego. Jest szczególnie zalecana przy wymuszeniach sinusoidalnych, choć obowiązuje również dla obwodów prądu stałego. Zaletą takiego podejścia jest jej uniwersalność i stosowność do każdego obwodu liniowego RLC niezależnie od rodzaju wymuszenia (wymuszenia stałe lub sinusoidalne mają jedynie wpływ na stan ustalony i są wyeliminowane przy rozwiązywaniu stanu przejściowego).

Należy podkreślić, że rozbieżność stanu nieustalonego na ustalony i przejściowy jest zalecane jedynie przy istnieniu wymuszeń sinusoidalnych w obwodzie po przełączeniu. Jeśli źródła takie nie występują schemat operatorowy może dotyczyć obwodu całkowitego, bez rozbijania go na schemat dla składowej ustalonej i przejściowej. W takim przypadku pozostawia się zewnętrzne źródła wymuszające w obwodzie przyjmując ich model operatorowy, czyli zastępując postać czasową źródła (wartość stała A przy wymuszeniu stałym) przez funkcję $\frac{A}{s}$. Warunki początkowe również nie podlegają modyfikacji, co oznacza, że $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ oraz $u_C(0^+) = u_C(0^-)$.

Przykład 13.1

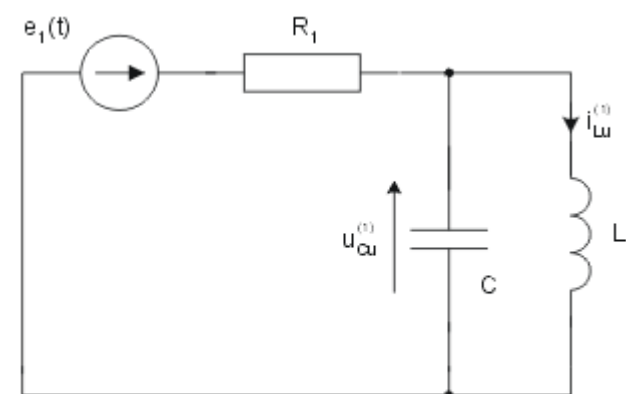
Wyznaczyć przebieg czasowy napięcia na kondensatorze w stanie nieustalonym w obwodzie z rys. 13.4 po przełączeniu. Dane liczbowe parametrów obwodu są następujące: $R_1 = R_2 = 1\Omega$, $L = 1H$, $C = 1F$, $e_2(t) = 10V$. Źródło wymuszające sinusoidalne dane jest w następującej postaci $e_1(t) = 5\sqrt{2} \sin(t + \pi/4) V$.



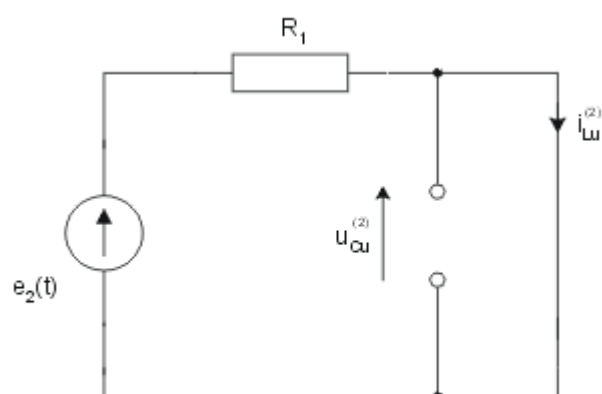
Rys. 13.4. Schemat obwodu do przykładu 13.10.

Rozwiązanie

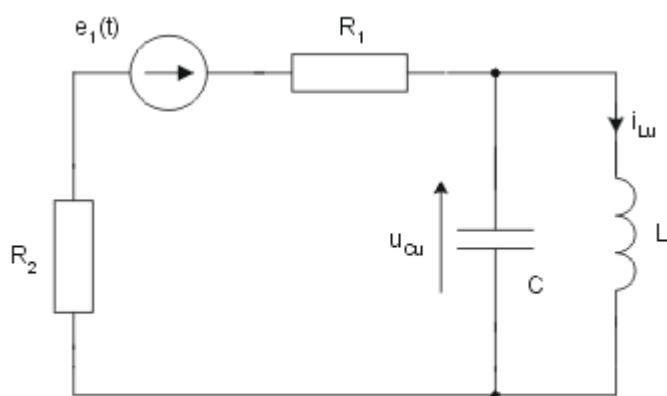
W rozwiązaniu problemu wyznaczmy najpierw warunki początkowe w obwodzie rozwiązując stan ustalony przed przełączeniem. Ponieważ przed przełączeniem w obwodzie występowały dwa źródła: stałe i sinusoidalne w obliczeniu warunków początkowych (stan ustalony przed przełączeniem) należy zastosować metodę superpozycji źródeł.



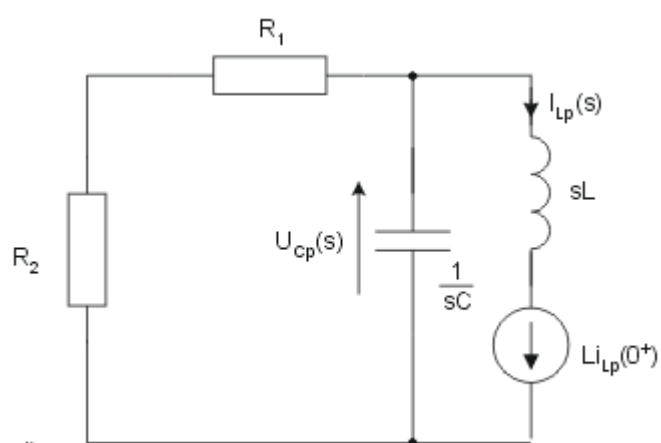
a)



b)



c)



d)

Rys. 13.5 Schematy obwodu: a) w stanie ustalonym przed przełączeniem (źródło sinusoidalne), b) w stanie ustalonym przed przełączeniem (źródło stałe), c) w stanie ustalonym po przełączeniu, d) schemat operatorowy dla składowej przejściowej

Schemat obwodu w stanie ustalonym przed przełączeniem przy wymuszeniu sinusoidalnym przedstawiony jest na rys. 13.5a. Wobec rezonansu równoległego w gałęzi LC prąd wydawany przez źródło jest równy zeru a napięcie na tej gałęzi jest równe napięciu źródła. Stąd

$$u_{Cu}^{(1)}(t) = 5\sqrt{2} \sin(t + \pi / 4)$$

Prąd cewki (wartość skuteczna zespolona) dany jest wzorem

$$I_{Lu}^{(1)} = \frac{5e^{j\pi/4}}{j1} = 5e^{-j\pi/4}$$

co odpowiada postaci czasowej

$$i_{Lu}^{(1)}(t) = 5\sqrt{2} \sin(t - \pi / 4)$$

Uwzględniając źródło stałe $e_2(t)$ uzyskuje się znaczne uproszczenie obwodu (cewka dla prądu stałego w stanie ustalonym stanowi zwarcie a kondensator przerwę) jak to przedstawiono na rys. 13.5b. Rozwiązanie na prąd cewki i napięcie kondensatora ma więc postać:

$$u_{Cu}^{(2)}(t) = 0$$

$$i_{Lu}^{(2)}(t) = \frac{10}{1} = 10$$

Dokonując superpozycji obu rozwiązań otrzymuje się

$$i_{Lu}(t) = i_{Lu}^{(1)}(t) + i_{Lu}^{(2)}(t) = 10 + 5\sqrt{2} \sin(t - \pi / 4)$$

$$u_{Cu}(t) = u_{Cu}^{(1)}(t) + u_{Cu}^{(2)}(t) = 5\sqrt{2} \sin(t + \pi/4)$$

Stąd warunki początkowe są następujące: $u_C(0^-) = 5$, $i_L(0^-) = 5$.

Po przełączeniu w obwodzie pozostaje jedynie źródło sinusoidalne $e_1(t)$. Schemat obwodu dla tego wymuszenia pokazany jest na rys. 13.5c. Z analizy tego obwodu wynika następująca procedura rozwiązania. Wobec rezonansu równoległego w gałęzi LC prąd wydawany przez źródło jest równy zeru a napięcie na tej gałęzi jest równe napięciu źródła. Stąd

$$u_{Cu}(t) = 5\sqrt{2} \sin(t + \pi/4)$$

Prąd cewki (wartość skuteczna zespolona) dany jest wzorem

$$I_{Lu} = \frac{5e^{j45^\circ}}{j1} = 5e^{-j\pi/4}$$

co odpowiada postaci czasowej

$$i_{Lu}(t) = 5\sqrt{2} \sin(t - \pi/4)$$

Stan początkowy dla składowej ustalonej prądu cewki i napięcia kondensatora przyjmuje więc następujące wartości:

$$u_{Cu}(0^+) = 5$$

oraz

$$i_{Lu}(0^+) = -5$$

Warunki początkowe dla składowej przejściowej prądu i napięcia są zatem równe:

$$u_{Cp}(0^+) = u_C(0^-) - u_{Cu}(0^+) = 0$$

$$i_{Lp}(0^+) = i_L(0^-) - i_{Lu}(0^+) = 10$$

Schemat operatorowy obwodu przedstawiono na rys. 13.5d (źródło wewnętrzne przy kondensatorze nie występuje, bo $u_{Cp}(0^+) = 0$). Zastosowanie metody potencjałów węzłowych do wyznaczenia postaci operatorowej rozwiązania prowadzi do wyniku

$$U_{Cp}(s) = \frac{-10/s}{s + 1/s + 0,5} = \frac{-10}{s^2 + 0,5s + 1}$$

Wobec zespolonych wartości własnych (pierwiastków mianownika transformaty napięcia) w wyznaczaniu oryginału zastosujemy metodę wykorzystującą tablice transformat. W związku z powyższym transformatę przedstawimy w postaci przekształconej

$$U_{Cp}(s) = \frac{-10}{s^2 + 0,5s + 1} = -\frac{(\sqrt{15/16}) \cdot 10 \cdot \sqrt{16/15}}{(s + 0,25)^2 + (\sqrt{15/16})^2} = -10,33 \frac{(\sqrt{15/16})}{(s + 0,25)^2 + (\sqrt{15/16})^2}$$

Powyższej funkcji operatorowej można przyporządkować następującą postać czasową (patrz wiersz szósty tablicy 12.1)

$$u_{Cp}(t) = -10,33e^{-0,25t} \sin(\sqrt{15/16}t)$$

Rozwiązanie całkowite określające napięcie kondensatora jest sumą składowej ustalonej i przejściowej

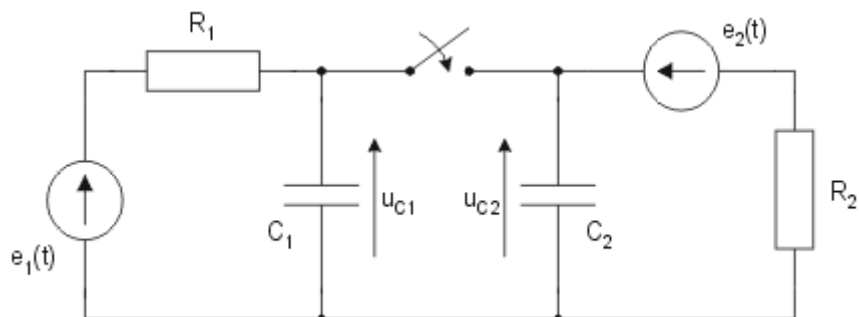
$$u_C(t) = u_{Cu}(t) + u_{Cp}(t) = 5\sqrt{2} \sin(t + \pi/4) - 10,33e^{-0,25t} \sin(\sqrt{15/16}t)$$

Składowa przejściowa zanika z biegiem czasu ze stałą czasową $\tau = 4$ i po około 5 stałych czasowych pozostaje jedynie składowa ustalona sinusoidalna.

Zadania sprawdzające

Zadanie 13.1

Określić przebieg napięcia na kondensatorze w stanie nieustalonym po przełączeniu metodą operatorową w obwodzie przedstawionym na rys. 13.6. Przyjąć następujące parametry obwodu: $R_1=50\Omega$, $R_2=100\Omega$, $C_1=10\mu\text{F}$, $C_2=20\mu\text{F}$, $e_1(t) = 50\text{ V}$, $e_2(t) = 100\text{ V}$.



Rys. 13.6 Schemat obwodu do zadania 13.1

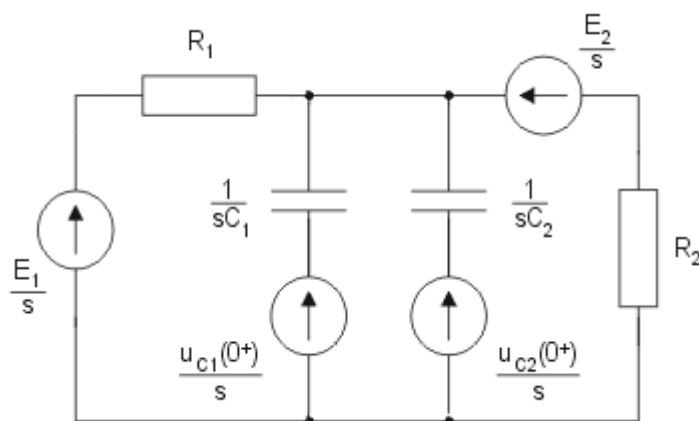
Rozwiązanie

Warunki początkowe:

$$u_{C1}(0^-) = e_1 = 50$$

$$u_{C2}(0^-) = e_2 = 100$$

Ze względu na wymuszenie stałe nie zachodzi potrzeba stosowania metody superpozycji stanu. Schemat operatorowy obwodu w stanie nieustalonym przedstawiony jest na rys. 13.7



Rys. 13.7 Schemat operatorowy obwodu

Z metody potencjałów węzłowych zastosowanych do obwodu z rys. 9.18 wynika

$$U_C(s) = \frac{\frac{50}{50s} + \frac{100}{100s} + 10^{-5}u_{C1}(0^+) + 2 \cdot 10^{-5}u_{C2}(0^+)}{1/50 + 1/100 + s10^{-5} + 2s10^{-5}}$$

$$U_C(s) = \frac{250s + 2,5 \cdot 10^5}{3s(s + 1000)}$$

Bieguny układu:

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = -1000$$

Transformata odwrotna Laplace'a

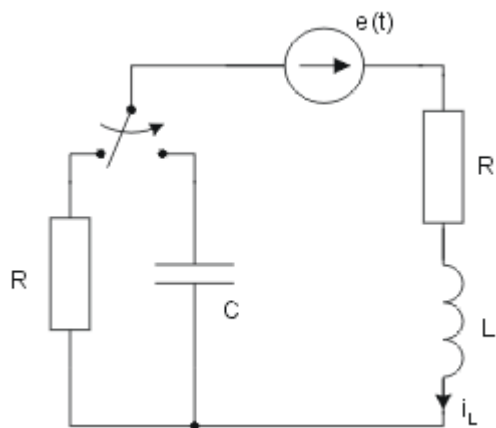
$$u_C(t) = \lim_{s \rightarrow 0} U_C(s)se^{st} + \lim_{s \rightarrow -1000} U_C(s)(s + 1000)e^{st}$$

$$u_C(t) = \frac{250}{3} + \frac{50}{3}e^{-1000t}$$

W stanie ustalonym przy $t \rightarrow \infty$ mamy $u_{Cu}(t) = \frac{250}{3} \text{ V}$.

Zadanie 13.2

Określić prąd cewki w stanie nieustalonym po przełączeniu w obwodzie przedstawionym na rys. 13.8. Przyjąć następujące wartości parametrów obwodu: $R=2\Omega$, $L=1\text{H}$, $C=1/4\text{F}$, $e(t) = 10\sqrt{2}\sin(4t + 45^\circ)$.



Rys. 13.8. Schemat obwodu do zadania 13.2

Rozwiązanie

1) Warunki początkowe w obwodzie:

$$\omega = 4$$

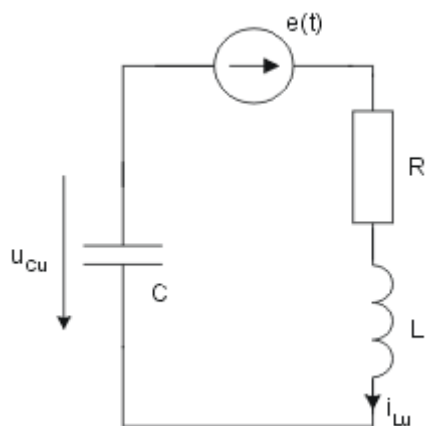
$$I_L = \frac{10e^{j45^\circ}}{4 + j4} = \frac{2,5}{\sqrt{2}}$$

$$i_L(t) = 2,5 \sin(4t)$$

$$i_L(0^-) = 0$$

$$u_C(0^-) = 0$$

2) Stan ustalony po przełączeniu w obwodzie (rys. 13.9)



Rys. 13.9. Schemat obwodu w stanie ustalonym po przełączeniu

$$I_{Lu} = \frac{10e^{j45^\circ}}{2 + j4 - j1} = 2,77e^{-j11,31^\circ}$$

$$U_{Cu} = -j1 \cdot I_{Lu} = 2,77e^{-j101,31^\circ}$$

$$i_{Lu}(t) = 2,77\sqrt{2} \sin(4t - 11,31^\circ)$$

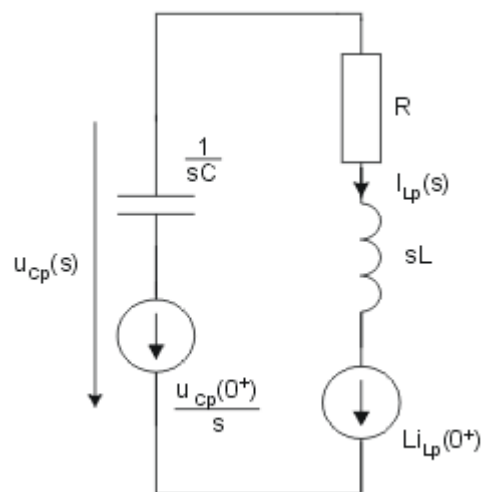
$$u_{Cu}(t) = 2,77\sqrt{2} \sin(4t - 101,31^\circ)$$

$$i_{Lu}(0^+) = -0,76$$

$$u_{Cu}(0^+) = -3,84$$

3) Stan przejściowy po przełączeniu

Schemat operatorowy przedstawiony jest na rys. 13.10.



Rys. 13.10 Schemat operatorowy obwodu po przełączeniu

Warunki początkowe dla stanu przejściowego:

$$i_{Lp}(0^+) = i_L(0^-) - i_{Lu}(0^+) = 0,76$$

$$u_{Cp}(0^+) = u_C(0^-) - u_{Cu}(0^+) = 3,84$$

Postać operatorowa rozwiązania

$$I_{Lp}(s) = \frac{Li_{Lp}(0^+) - u_{Cp}(0^+)/s}{s + 2 + 4/s} = \frac{0,76s - 3,84}{s^2 + 2s + 4}$$

Wobec zespolonych biegunów zastosujemy metodę tablicową określenia transformaty odwrotnej. Zgodnie z nią

$$I_{Lp}(s) = \frac{0,76(s+1) - 4,6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}}{(s+1)^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$i_{Lp}(t) = 0,76e^{-t} \cos(\sqrt{3}t) - 2,67e^{-t} \sin(\sqrt{3}t)$$

Rozwiązanie całkowite na prąd cewki w stanie nieustalonym

$$i_L(t) = i_{Lu}(t) + i_{Lp}(t) = 2,77\sqrt{2} \sin(4t - 11,31^\circ) + 0,76e^{-t} \cos(\sqrt{3}t) - 2,67e^{-t} \sin(\sqrt{3}t)$$

Lekcja 14. Stan nieustalony w obwodzie RLC przy załączeniu napięcia stałego

Wstęp

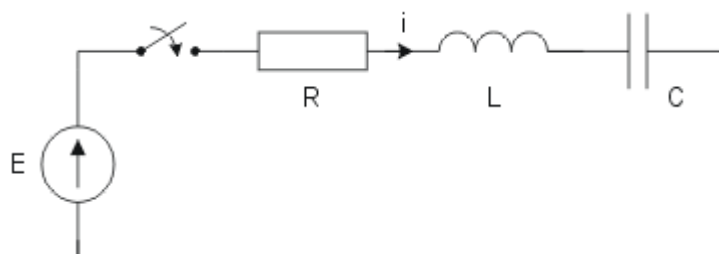
Jednym z najważniejszych przypadków stanu nieustalonego są zjawiska powstające w obwodzie RLC zawierającym jednocześnie cewkę i kondensator. W obwodzie takim powstają godne uwagi zjawiska, które znalazły ogromne zastosowanie w wielu dziedzinach elektroniki i elektrotechniki.

W tej lekcji zostanie przedstawiona analiza stanu nieustalonego w obwodzie szeregowym RLC. Analiza zostanie przeprowadzona przy zastosowaniu rachunku operatorowego Laplace'a. W zależności od wartości rezystancji mogą powstać trzy przypadki rozwiązania: przypadek oscylacyjny, gdy aktualna rezystancja obwodu jest mniejsza od krytycznej, przypadek aperiodyczny krytyczny, gdy ta rezystancja jest równa rezystancji krytycznej oraz przypadek aperiodyczny, gdy rezystancja obwodu jest większa od krytycznej. Szczególnie interesujący jest przypadek oscylacyjny, w którym przy zasilaniu obwodu napięciem stałym powstają drgania sinusoidalne o tłumionej amplitudzie. Przy rezystancji równej zero w obwodzie powstają drgania sinusoidalne niegasnące.



14.1 Równanie operatorowe obwodu

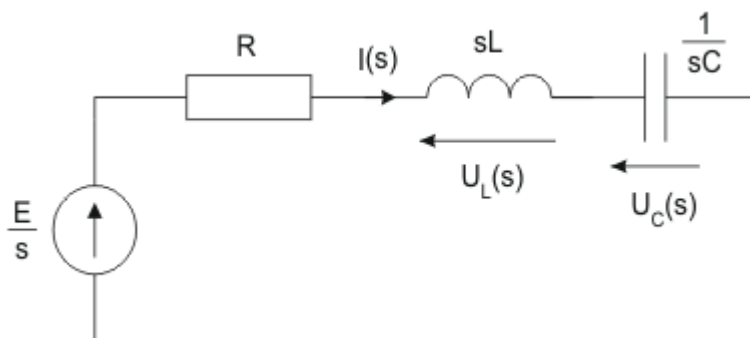
Rozpatrzmy załączenie napięcia stałego E do gałęzi szeregowej RLC przedstawionej na rys. 14.1.



Rys. 14.1. Załączenie napięcia stałego do obwodu szeregowego RLC

Wobec zerowych warunków początkowych (brak wymuszenia w obwodzie przed przełączeniem) mamy $u_C(0^-) = 0$, $i_L(0^-) = 0$.

Stan ustalony w obwodzie przy wymuszeniu stałym nie wymaga specjalnych obliczeń, gdyż wobec przerwy, jaką reprezentuje kondensator, prąd w obwodzie nie płynie ($i_{Lu}(t) = 0$) a napięcie na kondensatorze jest równe napięciu zasilającemu $u_{Cu}(t) = E$.



Rys. 14.2 Schemat operatorowy obwodu RLC w stanie nieustalonym

Schemat operatorowy obwodu w stanie nieustalonym przedstawiony jest na rys. 14.2. Warunki początkowe napięcia kondensatora i prądu cewki określają równania

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0 \quad (14.1)$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \quad (14.2)$$

Z prawa napięciowego Kirchhoffa zastosowanego do obwodu wynika następująca postać operatorowa prądu cewki

$$I(s) = \frac{E/s}{sL + R + 1/sC} = \frac{E/L}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (14.3)$$

Dla wyznaczenia transformaty odwrotnej należy obliczyć pierwiastki mianownika transmitancji, czyli

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (14.4)$$

W wyniku rozwiązania tego równania otrzymuje się dwa pierwiastki (bieguny układu)

$$s_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (14.5)$$

$$s_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (14.6)$$

Z postaci wzoru opisującego bieguny wynika, że w zależności od znaku funkcji podpierwiastkowej możliwe są 3 przypadki rozwiązania.

- Przypadek **aperiodyczny** dla $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Przy spełnieniu tego warunku oba bieguny są rzeczywiste i ujemne. Charakter zmian prądu w obwodzie w stanie przejściowym jest aperiodyczny (nieokresowy) zanikający do zera w sposób wykładniczy.
- Przypadek **aperiodyczny krytyczny** występujący dla $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Przy spełnieniu tego warunku oba bieguny są rzeczywiste i równe sobie. Charakter zmian prądu w obwodzie w stanie przejściowym jest również aperiodyczny, podobnie jak w przypadku pierwszym, ale jego czas trwania jest najkrótszy z możliwych.
- Przypadek **oscylacyjny** (periodyczny) występujący dla $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Przy spełnieniu tego warunku oba bieguny są zespolone (zespolony i sprzężony z nim). Charakter zmian prądu w obwodzie w stanie przejściowym jest sinusoidalny tłumiony, o oscylacjach zanikających do zera.

Rezystancja $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ nazywana jest rezystancją krytyczną i oznaczana w postaci R_{kr} .

14.2 Przypadek aperiodyczny

Rozpatrzmy najpierw przypadek pierwszy (aperiodyczny). Ze względu na to, że oba bieguny są rzeczywiste w obliczeniach transformacji odwrotnej najwygodniej jest zastosować metodę residuów. Zgodnie z nią przebieg czasowy prądu $i_p(t)$ można zapisać w postaci

$$i(t) = \frac{E}{2L\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} \left[e^{s_1 t} - e^{s_2 t} \right] \quad (14.7)$$

Podstawiając wartości s_1 i s_2 określone wzorami (14.5) i (14.6) otrzymuje się postać hiperboliczną rozwiązania na prąd cewki w stanie nieustalonym

$$i(t) = \frac{E}{L\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} e^{-\frac{R}{2L}t} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} t \right) \quad (14.8)$$

We wzorze występuje czynnik tłumiący typu wykładniczego $e^{-\frac{R}{2L}t}$. Wielkość $\alpha = \frac{R}{2L}$ nazywana jest **współczynnikiem tłumienia**. Jej wartość jest proporcjonalna do wartości rezystancji. Im większa rezystancja tym większe tłumienie w obwodzie.

W podobny sposób wyznaczyć można pozostałe przebiegi czasowe w obwodzie: napięcie cewki i kondensatora. Transformata napięcia na kondensatorze wyrażona jest wzorem

$$U_C(s) = \frac{1}{sC} I(s) = \frac{E}{LC} \frac{1}{s \left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \right)} \quad (14.9)$$

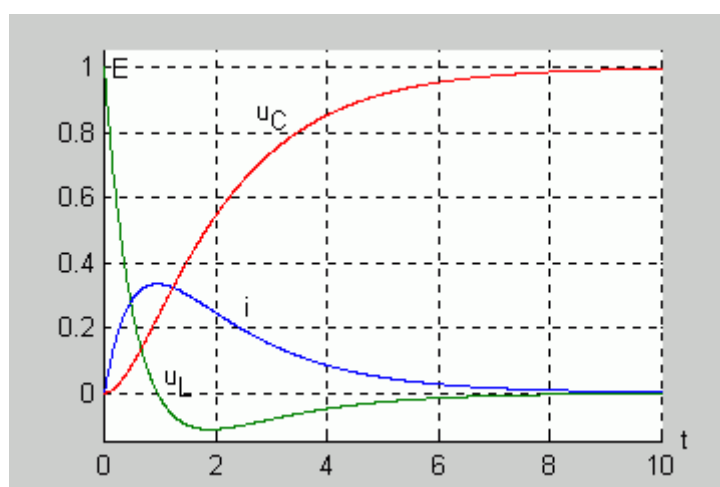
Po zastosowaniu wzoru na residuum otrzymujemy

$$u_C(t) = E + \frac{E}{2\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} (s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}) \quad (14.10)$$

Obliczenie napięcia cewki w stanie nieustalonym może być uzyskane bezpośrednio z postaci czasowej poprzez różniczkowanie zależności na prąd cewki. Po wykonaniu odpowiednich działań otrzymuje się

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = \frac{E}{2\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} [s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}] \quad (14.11)$$

Na rys. 14.3 przedstawiono przebiegi prądu, napięcia na kondensatorze i cewce w stanie nieustalonym w obwodzie RLC dla $R = 2,3\Omega$, $C = 1\text{F}$ i $L = 1\text{H}$ przy załączeniu napięcia stałego $E = 1\text{V}$. Dla przyjętych wartości parametrów elementów mamy do czynienia z przypadkiem aperiodycznym.

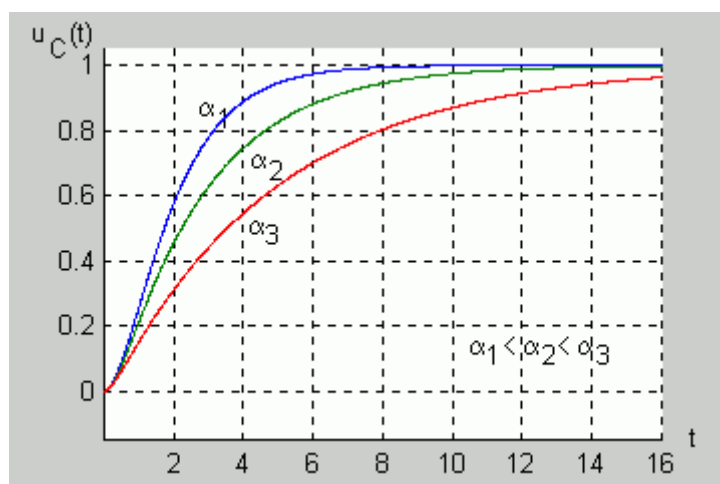


Rys. 14.3. Przebiegi prądu i napięć w obwodzie RLC dla przypadku aperiodycznego



Prąd w obwodzie oraz napięcie na kondensatorze zachowują ciągłość i spełniają prawa komutacji. W stanie ustalonym prąd w obwodzie nie płynie (kondensator w stanie ustalonym stanowi przerwę) a napięcie na kondensatorze przyjmuje wartość napięcia zasilającego E . Zauważmy ponadto, że wartości maksymalnej prądu odpowiada zerowa wartość napięcia na cewce ($u_L(t) = L \frac{di}{dt}$). W chwili, gdy napięcie na cewce osiąga wartość maksymalną ujemną, w przebiegu napięcia na kondensatorze można zauważyć punkt przegięcia.

Na rys. 14.4 przedstawiono wykresy przebiegów ładowania kondensatora w obwodzie RLC dla przypadku aperiodycznego opisanego wzorem (14.10) dla 3 różnych wartości współczynnika tłumienia $\alpha = \frac{R}{2L}$.



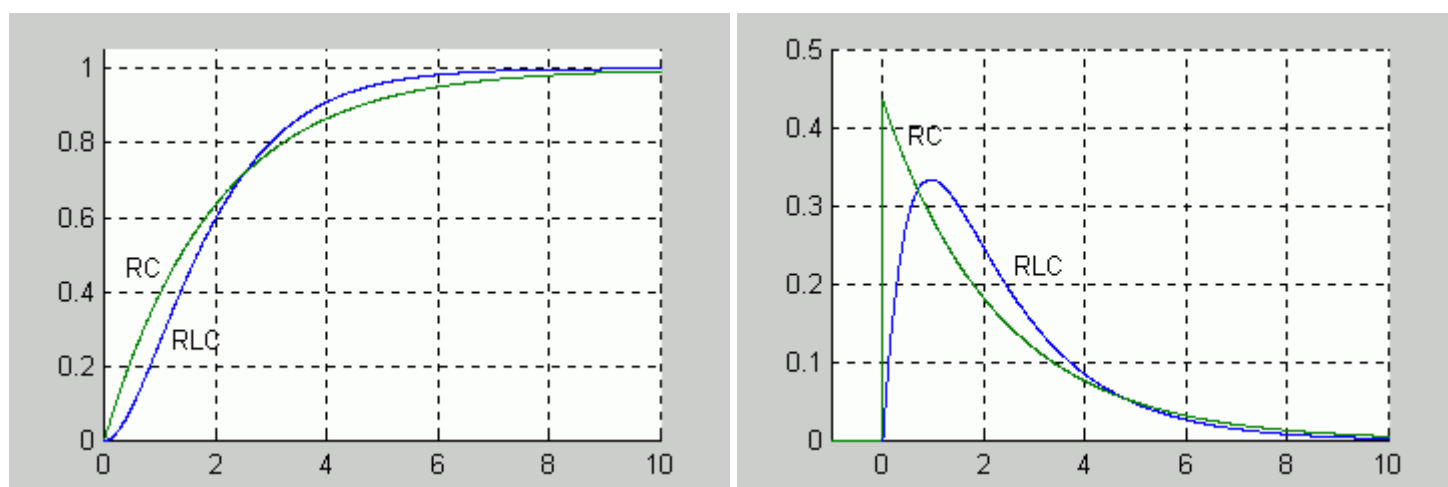
Rys. 14.4. Przebiegi napięć na kondensatorze dla różnej wartości współczynnika tłumienia



Jak widać, im większa jest wartość tego współczynnika, tym dłużej trwa dochodzenie do stanu ustalonego. Interesujące jest porównanie procesu ładowania kondensatora w obwodzie RLC w stanie aperiodycznym (wzór 14.10) oraz w obwodzie RC. Napięcie i prąd kondensatora w obwodzie RC, jak zostało pokazane w lekcji jedenastej opisane są funkcjami

$$u_C(t) = E(1 - e^{-t/RC}), \quad i_C(t) = \frac{E}{R}e^{-t/RC}.$$

Na rys. 14.5 przedstawiono przebiegi napięcia na kondensatorze (rys. 14.5a) oraz prądu (rys. 14.5b).



Rys. 14.5 Porównanie procesu ładowania kondensatora w obwodzie RC i RLC



W napięciu $u_C(t)$ w obwodzie RLC widoczny jest łagodnie narastający przebieg z punktem przegięcia. Prąd ładowania kondensatora, będący jednocześnie prądem cewki, narasta od wartości zerowej z zachowaniem ciągłości, a więc spełniając warunki nakładane przez prawa komutacji. W obwodzie RC widoczny jest gwałtowny skok prądu w chwili przełączenia (prawa komutacji nie dotyczą prądu kondensatora).

14.3 Przypadek aperiodyczny krytyczny

W przypadku aperiodycznym krytycznym, wobec spełnienia relacji $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ oba pierwiastki mianownika są równe i transformata prądu wyraża się wzorem

$$I(s) = \frac{E/L}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2} \quad (14.12)$$

Zastosowanie wzoru na residuum dla pierwiastka podwójnego $s_1 = s_2 = -\frac{R}{2L} = -\alpha$ prowadzi do następującej postaci prądu cewki $i(t)$

$$i(t) = \frac{E}{L} t e^{-\frac{R}{2L}t} \quad (14.13)$$

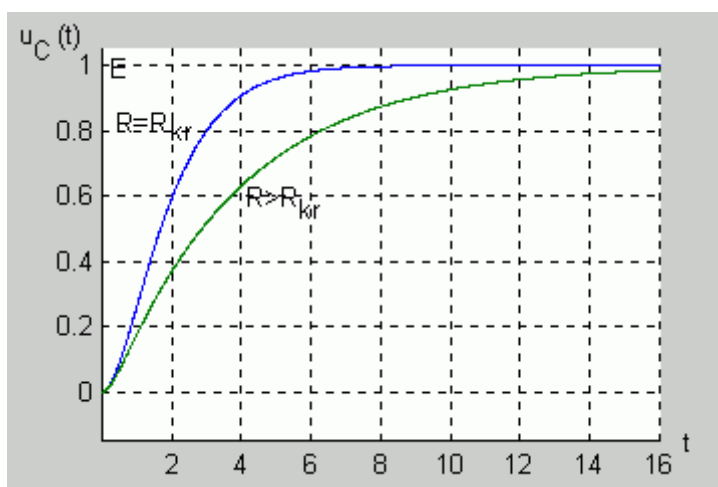
W analogiczny sposób można wyznaczyć pozostałe przebiegi (napięcia kondensatora i cewki) dla stanu aperiodycznego krytycznego. W przypadku napięcia na cewce bezpośrednio poprzez różniczkowanie funkcji czasowej prądu otrzymuje się

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = E e^{-\frac{R}{2L}t} \left(1 - \frac{R}{2L}t\right) \quad (14.14)$$

Napięcie na kondensatorze w stanie nieustalonym można uzyskać bezpośrednio z prawa napięciowego Kirchhoffa napisanego dla obwodu z rys. 14.1 po przełączeniu. Mianowicie

$$u_C(t) = E - Ri_L(t) - u_L(t) = E - Ee^{-\frac{R}{2L}t} \left(1 + \frac{R}{2L}t \right) \quad (14.15)$$

Na rys. 14.6 przedstawiono przebieg ładowania kondensatora w stanie aperiodycznym krytycznym na tle przypadku aperiodycznego.



Rys. 14.6. Porównanie procesu ładowania kondensatora w obwodzie RLC dla przypadku aperiodycznego i aperiodycznego krytycznego



Jedyna różnica występuje w czasie trwania stanu przejściowego, który najszybciej zanika dla przypadku krytycznego. Charakter przebiegu prądu i napięć w obwodzie dla przypadku aperiodycznego krytycznego jest podobny do zwykłego przypadku aperiodycznego, z tym, że najszybciej uzyskiwany jest stan ustalony (stan przejściowy trwa najkrócej z możliwych).

14.4 Przypadek oscylacyjny

Przypadek oscylacyjny zmian prądu i napięć w obwodzie szeregowym RLC występuje przy spełnieniu warunku $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ a więc przy małych wartościach rezystancji R . W tym przypadku oba bieguny są zespolone. Dla wyznaczenia postaci czasowej prądu wygodniej jest

zastosować metodę tablic transformat. W tym celu należy przekształcić wyrażenie na prąd operatorowy w taki sposób, aby doprowadzić je do postaci występującej w tablicy 12.1. Dla zadanej postaci prądu przekształcenia te są jak następuje

$$I(s) = \frac{E/L}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\right)^2} \cdot \frac{E/L}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \quad (14.16)$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (14.17)$$

Wielkość ω jest **pulsacją drgań własnych** obwodu RLC występujących w przypadku oscylacyjnym. Wykorzystując tablicę transformat 12.1 możemy uzyskać postać czasową prądu w obwodzie. Można ją zapisać w postaci

$$i(t) = \frac{E}{\omega L} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega t) \quad (14.18)$$

Prąd w przypadku oscylacyjnym opisany jest funkcją sinusoidalną o amplitudzie zmieniającej się według funkcji wykładniczej. Czynniki $e^{-\frac{R}{2L}t}$ stanowi tłumienie przebiegu sinusoidalnego a jego wartość jest proporcjonalna do wartości rezystancji obwodu RLC. Odwrotność współczynnika tłumienia charakteryzuje stałą czasową $\tau = \frac{2L}{R}$ obwodu RLC z jaką tłumione są drgania sinusoidalne.

Wykorzystując podstawowe relacje zachodzące między zmiennymi w obwodzie szeregowym RLC można wyznaczyć pozostałe napięcia w obwodzie w stanie nieustalonym. W przypadku cewki napięcie uzyskuje się przez zróżniczkowanie funkcji opisującej prąd ładowania.

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -\frac{E}{\omega\sqrt{LC}} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega t - \varphi) \quad (14.19)$$

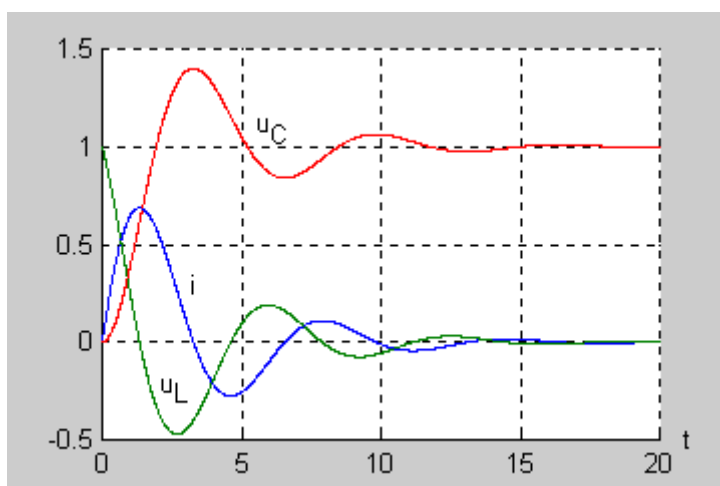
gdzie kąt φ jest określony relacją

$$\varphi = \arctg \frac{\omega}{R/2L} \quad (14.20)$$

Napięcie na kondensatorze wyznaczyć można bezpośrednio z prawa napięciowego Kirchhoffa zastosowanego do obwodu rzeczywistego z rys. 14.1

$$u_C(t) = E - u_L(t) - Ri(t) = E - \frac{E}{\omega L} e^{-\frac{R}{2L}t} \left[R \sin(\omega t) - \sqrt{\frac{L}{C}} \sin(\omega t - \varphi) \right] \quad (14.21)$$

Na rys. 14.7 przedstawiono przebiegi prądu i napięć w stanie nieustalonym w obwodzie RLC przy wystąpieniu przypadku oscylacyjnego, czyli przy $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.



Rys. 14.7. Przebiegi czasowe w obwodzie RLC dla przypadku oscylacyjnego

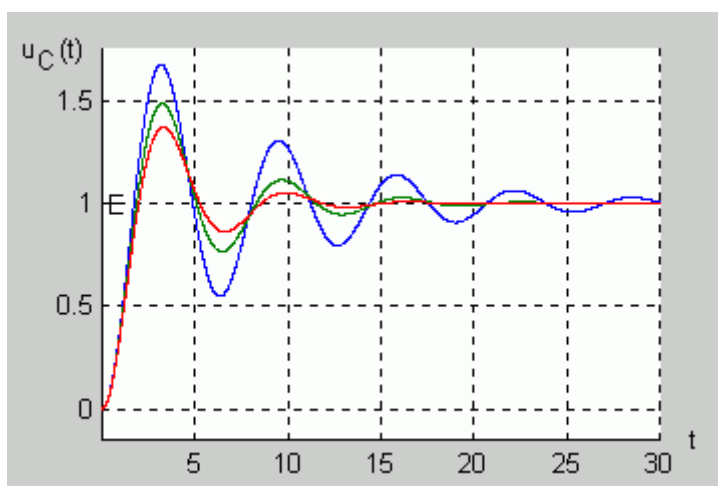


Przebieg prądu ma charakter sinusoidalny, tłumiony wykładniczo do zera. Obwiednie przebiegu prądu są wyznaczone funkcjami $f(t) = \pm \frac{E}{\omega L} e^{-\frac{R}{2L}t}$. Przy zasilaniu obwodu RLC

napięciem stałym wytworzyły się drgania własne o pulsacji $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$. Pulsacja ta zależy wyłącznie od parametrów obwodu RLC. Głównym czynnikiem regulującym wartość pulsacji wobec małej wartości rezystancji R dla przypadku oscylacyjnego jest wartość indukcyjności L oraz pojemności C . Przy danych wartościach L , C i regulowanej rezystancji, pulsacja rośnie przy malejącej wartości rezystancji.

Drgania w obwodzie powstają na skutek wymiany energii między polem elektrycznym kondensatora a polem magnetycznym cewki. Na skutek skończonej wartości rezystancji zachodzi rozpraszanie energii w postaci ciepła wydzielanego na rezystorze. Stąd oscylacje powstające w obwodzie mają charakter malejący. Szybkość tłumienia określa stała tłumienia $\alpha = \frac{R}{2L}$. Im większa wartość rezystancji tym większe tłumienie w obwodzie i szybsze zanikanie drgań sinusoidalnych do zera.

Na rys. 14.8 przedstawiono przykładowe przebiegi ładowania kondensatora w obwodzie RLC dla przypadków oscylacyjnych przy zmieniającej się wartości rezystancji.

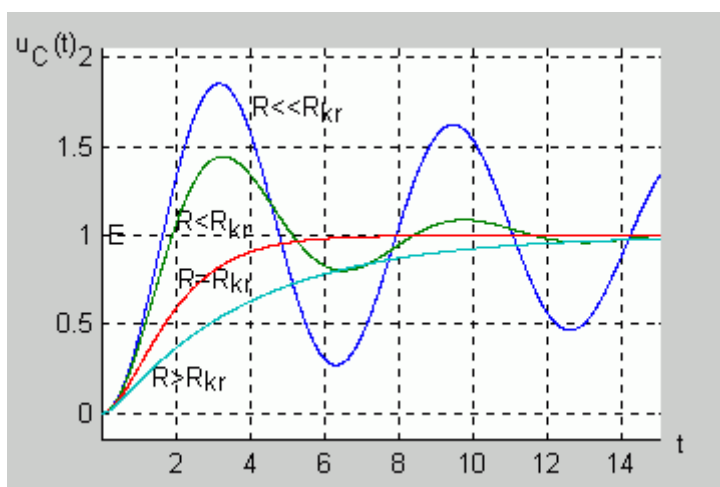


Rys. 14.8. Przebiegi napięcia na kondensatorze dla przypadku oscylacyjnego przy zmieniającej się wartości rezystancji



Widoczne jest, że im mniejsza wartość rezystancji tym dłużej trwa stan przejściowy w obwodzie. Wobec małych wartości rezystancji wynikających z warunku występowania przypadku oscylacyjnego jej wpływ na częstotliwość drgań własnych obwodu (wzór 14.17) jest stosunkowo niewielki.

Należy podkreślić, że jakkolwiek wyrażenia analityczne opisujące przebiegi czasowe w obwodzie dla różnych przypadków tłumienia są znacznie różniące się między sobą, wszystkie reprezentują charakter ciągły. Poszczególne przypadki przechodzą w siebie nawzajem przy ciągłej zmianie wartości rezystancji. Przy małej rezystancji tłumienie jest małe i przebieg prądu oraz napięcie jest oscylacyjny, tłumiony wykładniczo. Wzrost wartości rezystancji powoduje wzrost tłumienia, drgania trwają krócej aż przy pewnej wartości krytycznej $R_{kr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ przechodzą w przebieg aperiodyczny (krytyczny), przy którym nie obserwuje się już drgań. Dalszy wzrost rezystancji niewiele zmienia w charakterze jakościowym przebiegów poza wydłużeniem stanu przejściowego. Ilustrację powyższego zjawiska na przykładzie napięcia $u_C(t)$ w obwodzie przedstawiono na rys. 14.9.



Rys. 14.9. Przebiegi napięcia na kondensatorze w obwodzie RLC przy ciągłej zmianie wartości rezystancji

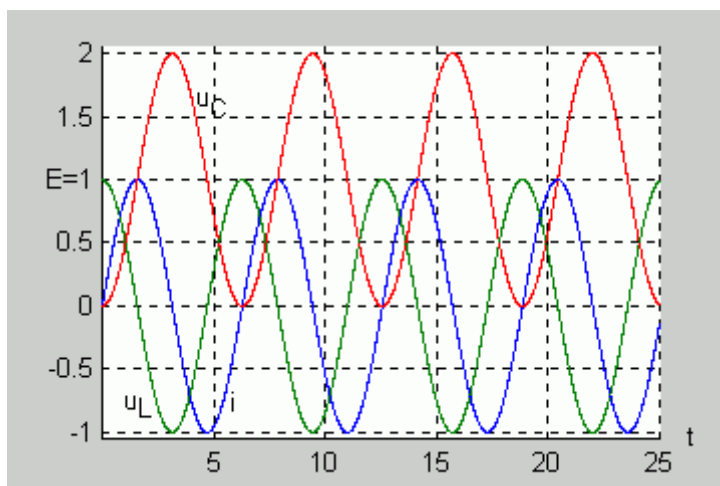


14.5 Obwód bezstratny LC w stanie nieustalonym

Interesujące zjawiska w stanie nieustalonym występują w obwodzie RLC o zerowej rezystancji. Obwód taki nazywać będziemy obwodem LC. Jak wynika z przedstawionych wyżej wzorów tłumienie w takim obwodzie jest zerowe ($\alpha = \frac{R}{2L} = 0$) a pulsacja drgań własnych zależy wyłącznie od indukcyjności i pojemności i określona jest wzorem

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (14.22)$$

Przy zerowym tłumieniu drgania oscylacyjne powstałe w obwodzie na skutek stanu przejściowego nigdy nie gasną. Obwód zasilony napięciem stałym generuje niegasnące drgania sinusoidalne stając się generatorem sygnałów harmoniczných. Przypadek powstania drgań niegasnących w obwodzie LC przedstawiono na rys. 14.10, na którym przedstawiono przebieg napięcia na kondensatorze, prądu w obwodzie oraz napięcia cewki.



Rys. 14.10. Przebiegi prądu i napięć w stanie nieustalonym w obwodzie LC



W obwodzie zaobserwować można powstanie dwukrotnego przebiegu na kondensatorze (wartość maksymalna napięcia jest równa $2E$).

Zjawisko powstawania niegasnących drgań sinusoidalnych w obwodzie LC wykorzystuje się powszechnie w generatorach drgań harmoniczných. W rozwiązaniach

praktycznych takich generatorów konieczne jest jednak zastosowanie elementów odtłumiających, kompensujących skończone tłumienie wynikające z istnienia rezystancji uzwojeń cewki i skończonej stratności kondensatora. Rolę układów odtłumiających obwód pełnić mogą elementy aktywne generujące energię, takie jak wzmacniacze operacyjne, tranzystory, pewne typy diód itp.

Zadania sprawdzające

Zadanie 14.1

Wartości indukcyjności i pojemności w obwodzie szeregowym RLC są równe: $L = 0,01\text{H}$ oraz $C = 1\mu\text{F}$. Określić zmiany częstotliwości drgań własnych tego obwodu w funkcji wartości rezystancji R zmieniającej się od zera do rezystancji krytycznej.

Rozwiązanie

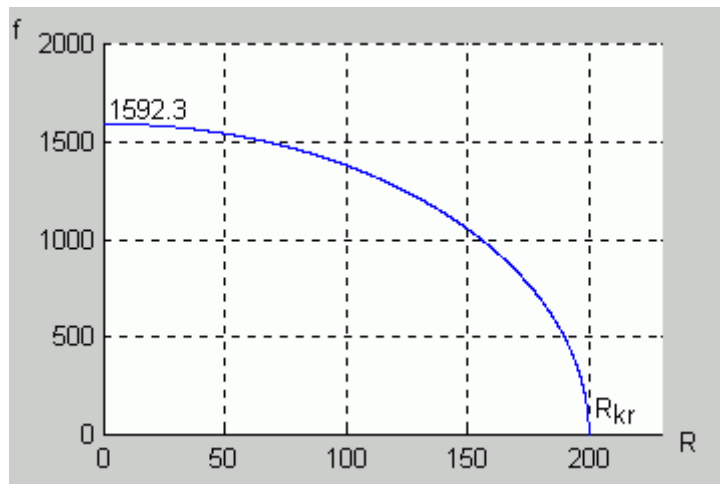
Częstotliwość drgań własnych obwodu szeregowego RLC dana jest wzorem

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{10^8 - 0,25 \cdot 10^4 R^2}$$

Rezystancja krytyczna

$$R_{kr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 200\Omega$$

Na rys. 14.11 przedstawiono zależność częstotliwości drgań własnych obwodu od wartości rezystancji R w podanym zakresie zmian rezystancji



Rys. 14.11. Wykres zależności częstotliwości drgań własnych obwodu od wartości rezystancji



Zadanie 14.2

Określić charakter odpowiedzi czasowej w obwodzie szeregowym RLC, jeśli indukcyjność $L = 0,1\text{H}$, pojemność $C = 10^{-5}\text{F}$ a wartości rezystancji są równe: a) $R = 50\Omega$, b) $R = 200\Omega$, c) $R = 500\Omega$.

Rozwiązanie

Charakter odpowiedzi czasowych w obwodzie RLC zależy od stosunku rezystancji obwodu do rezystancji krytycznej. W przypadku danych w obwodzie rezystancja krytyczna jest równa

$$R_{kr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 200\Omega$$

W związku z powyższym otrzymujemy:

- a) $R < R_{kr} \rightarrow$ przypadek oscylacyjny
- b) $R = R_{kr} \rightarrow$ przypadek aperiodyczny krytyczny
- c) $R > R_{kr} \rightarrow$ przypadek aperiodyczny

Lekcja 15. Transmitancja operatorowa obwodów

Wstęp

W tej lekcji wprowadzone zostanie pojęcie transmitancji operatorowej obwodu. Podane zostaną definicje różnych rodzajów transmitancji oraz metod ich wyznaczania wykorzystujących impedancje operatorowe elementów. Poznamy związek transmitancji operatorowej z opisem stanowym obwodu. Wprowadzone zostaną definicje odpowiedzi impulsowej i skokowej oraz ich związek z transmitancją operatorową. Na podstawie opisu operatorowego i odpowiedzi impulsowej zostanie wyjaśnione pojęcie stabilności obwodu i udowodniony związek stabilności z położeniem biegunów na płaszczyźnie zmiennej zespolonej.



15.1 Definicja transmitancji operatorowej

Rozważania dotyczące analizy stanów nieustalonych metodą operatorową zakładały badanie zjawisk zachodzących w obwodach na skutek przełączeń. W ogólnym przypadku zakładaliśmy wystąpienie niezerowych warunków początkowych wynikających ze stanu obwodu przed komutacją. Badania dotyczyły dowolnych prądów lub napięć w obwodzie. Z punktu widzenia praktycznego szczególnie ważny jest przypadek zerowych warunków początkowych i obliczania jedynie wybranego prądu lub napięcia w obwodzie traktowanego jako sygnał wyjściowy. W takim przypadku wygodnie jest wprowadzić pojęcie **transmitancji operatorowej**.

Weźmy pod uwagę obwód złożony z dowolnych elementów pasywnych RLCM i źródeł sterowanych nie zawierających wewnątrz żadnych źródeł niezależnych. Wyróżnimy w tym obwodzie jedną parę zacisków uważanych za wejściowe, do których przykładamy źródło wymuszające oraz drugą parę zacisków wyjściowych, z których zbieramy prąd (zaciski zwarte) lub napięcie (zaciski rozwarte).

Transmitancja operatorowa określa związek między transformatą operatorową sygnału wyjściowego (odpowiedzi), którą tutaj oznaczymy w ogólności przez $Y(s)$ oraz transformatą operatorową wymuszenia (sygnału wejściowego), oznaczoną ogólnie przez $X(s)$. Transmitancją operatorową nazywać będziemy stosunek transformaty sygnału wyjściowego

(prądu lub napięcia) do transformaty sygnału wejściowego układu (źródła napięciowego lub prądowego) przy zerowych warunkach początkowych

$$T(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (15.1)$$

W zależności od sygnału wejściowego i wyjściowego układu wyróżnić można cztery rodzaje transmitancji operatorowych: transmitancja napięciowa, prądowa, napięciowo-prądowa i prądowo-napięciowa. Przyjmijmy oznaczenie bramy wejściowej cyfrą 1 a bramy wyjściowej cyfrą 2 jak to pokazano na rys. 15.1.



Rys. 15.1. Oznaczenie układu przy definicji transmitancji

15.1.1 Transmitancja napięciowa (napięciowo-napięciowa)

Transmitancja napięciowa dotyczy stosunku dwu napięć zewnętrznych układu. Sygnałem wejściowym jest źródło napięciowe, a sygnałem wyjściowym napięcie na dowolnym elemencie uznane za napięcie wyjściowe. Jest ona definiowana w postaci

$$T_u(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \quad (15.2)$$

W definicji transmitancji napięciowej zakłada się, że napięcie wyjściowe układu mierzone jest w stanie jałowym tzn. przy $Z_0 = \infty$ (bez obciążenia zacisków wyjściowych, $I_2=0$).

15.1.2 Transmitancja prądowa (prądowo-prądowa)

Transmitancja prądowa dotyczy stosunku dwu prądów zewnętrznych układu, z których jeden jest prądem wymuszającym a drugi prądem gałęzi uznanym za prąd wyjściowy i jest definiowana w postaci

$$T_i(s) = \frac{I_2(s)}{I_1(s)} \quad (15.3)$$

W definicji tej transmitancji zakłada się, że prąd wyjściowy I_2 jest mierzony w części bezimpedancyjnej gałęzi wyjściowej $Z_0 = 0$ odpowiadającej $U_2 = 0$.

15.1.3 Transmitancja napięciowo-prądowa

Transmitancja napięciowo-prądowa przyjmuje napięcie na dowolnym elemencie obwodu jako sygnał wyjściowy $Y(s)$. Sygnałem wejściowym $X(s)$ jest wymuszenie prądowe. Jest zatem zdefiniowana w postaci

$$T_{ui}(s) = \frac{U_2(s)}{I_1(s)} \quad (15.4)$$

Napięcie U_2 mierzone jest w stanie jałowym ($Z_0 = \infty$) obwodu.

15.1.4 Transmitancja prądowo-napięciowa

Transmitancję prądowo-napięciową definiuje się jako stosunek prądu wyjściowego do napięcia wejściowego (sygnałem wejściowym $X(s)$ jest napięcie wymuszające a sygnałem wyjściowym $Y(s)$ prąd dowolnego elementu w obwodzie)

$$T_{iu}(s) = \frac{I_2(s)}{U_1(s)} \quad (15.5)$$

Szczególnym przypadkiem transmitancji napięciowo-prądowej jest **impedancja wejściowa** układu, w definicji której przyjmuje się, że prąd i napięcie dotyczą tej samej bramy wejściowej. Jej definicja jest przyjmowana w postaci

$$Z_{we}(s) = \frac{U_1(s)}{I_1(s)} \quad (15.6)$$

Definicja impedancji wejściowej układu zakłada dowolny stan obciążenia Z_0 . Należy jednak zwrócić uwagę, że każda zmiana impedancji obciążenia zmienia impedancję wejściową. Stąd definiując impedancję wejściową należy sprecyzować, przy jakim obciążeniu jest ona wyznaczana.

W identyczny sposób można zdefiniować impedancję wyjściową, w której prąd i napięcie dotyczą bramy wyjściowej układu. Odwrotność impedancji wejściowej (lub wyjściowej) nazywana jest admitancją wejściową (wyjściową), która może być zinterpretowana jako szczególny przypadek transmitancji prądowo-napięciowej.

15.2 Transmitancja operatorowa obwodów RLC

Przy wyznaczaniu transmitancji operatorowej obwodu zawierającego rezystancje, indukcyjności, indukcyjności sprzężone i pojemności wykorzystuje się model operatorowy poszczególnych elementów R , L , C i M wprowadzony w lekcji poprzedniej. Przy założeniu zerowych warunków początkowych dla indukcyjności i pojemności modele tych elementów nie zawierają źródeł a jedynie impedancje operatorowe $Z(s)$. Zestaw impedancji operatorowych dla elementów pasywnych przedstawiono w tablicy 15.1

Tablica 15.1 Impedancje operatorowe przyporządkowane elementom pasywnym

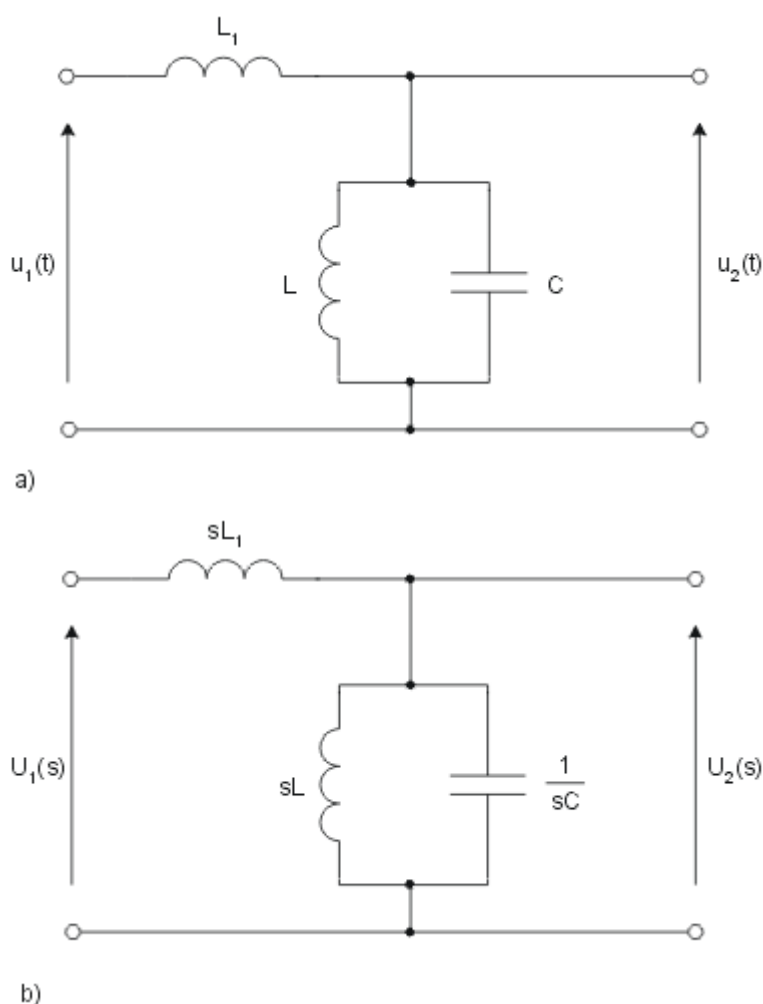
Element	Impedancja operatorowa
Rezystancja R	$Z_R = R$
Indukcyjność własna L	$Z_L = sL$
Indukcyjność wzajemna $\pm M$	$Z_M = \pm sM$
Pojemność C	$Z_C = \frac{1}{sC}$

Dla obwodów pasywnych zawierających elementy R , L , C i M obliczenie transmitancji operatorowej polega na zastąpieniu elementu rzeczywistego poprzez ich impedancje operatorowe a następnie wykorzystując dowolną metodę analizy (metoda praw Kirchhoffa, węzłowa, oczkowa, Thevenina, Nortona) należy wyznaczyć odpowiedź operatorową w funkcji wymuszenia. Wobec liniowości obwodu każda jego odpowiedź (dowolny prąd i

dowolne napięcie) jest liniową funkcją wymuszenia. Obliczając transmitancję dzieli się odpowiedź przez wymuszenie, w wyniku czego zmienna będąca wymuszeniem ulega redukcji i w efekcie transmitancja zależy wyłącznie od parametrów RLC obwodu oraz źródeł sterowanych, będąc jednocześnie funkcją zmiennej zespolonej s . Metodę wyznaczania transmitancji operatorowej zilustrujemy na przykładzie obwodu LC przedstawionego na rys. 15.2.

Przykład 15.1

Należy wyznaczyć transmitancję napięciową obwodu przedstawionego na rys. 15.2a, zakładając, że napięcie wyjściowe pochodzi z elementów L i C połączonych równolegle.



Rys. 15.2. Schematy obwodów do wyznaczania transmitancji: a) obwód oryginalny, b) schemat operatorowy obwodu

Rozwiązanie

Schemat operatorowy obwodu do wyznaczenia transmitancji przedstawiony jest na rys. 15.2b (warunki początkowe są z definicji zerowe). Zastępując cewkę i kondensator połączone równolegle jedną impedancją zastępczą $Z_{LC}(s)$

$$Z_{LC}(s) = \frac{sL \cdot \frac{1}{sC}}{sL + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{1}{C}s}{s^2 + \frac{1}{LC}}$$

i stosując prawo napięciowe Kirchhoffa do tak uproszczonego obwodu, otrzymuje się

$$U_2(s) = \frac{Z_{LC}(s)}{Z_{LC}(s) + sL_1} U_1(s)$$

Po prostych przekształceniach uzyskuje się wynik na transmitancję napięciową w postaci

$$T_u(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Z_{LC}(s)}{Z_{LC}(s) + sL_1} = \frac{\frac{1}{L_1 C} s}{s^3 + s \left(\frac{1}{L_1 C} + \frac{1}{LC} \right)} = \frac{\frac{1}{L_1 C}}{s^2 + \left(\frac{1}{L_1 C} + \frac{1}{LC} \right)}$$

W ostatecznym wyrażeniu na transmitancję operatorową zmienna stanowiąca wymuszenie nie występuje (uległa redukcji). Przyjmijmy następujące wartości elementów obwodu: $L = 1\text{H}$, $L_1 = 0,5\text{H}$, $C = 1\text{F}$ (wartości znormalizowane). Podstawiając je do wzoru na $T_u(s)$ otrzymujemy

$$T_u(s) = \frac{2}{s^2 + 3}$$

Jest to tak zwana postać wymierna, zawierająca wielomian zmiennej zespolonej s zarówno w liczniku (stopień równy zero) jak i w mianowniku (stopień równy dwa).

W ogólnym przypadku obwodu elektrycznego liniowego zawierającego rezystory, cewki i kondensatory oraz źródła sterowane dowolna transmitancja operatorowa ma postać funkcji wymiernej o stopniu licznika równym m i stopniu mianownika równym n

$$T(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (15.7)$$

Współczynniki a_i mianownika oraz b_i licznika są funkcjami parametrów elementów obwodu i dla ich konkretnych wartości przyjmują wartości rzeczywiste. Najwyższy stopień wielomianu jest równy (w szczególnych przypadkach mniejszy) liczbie elementów reaktancyjnych (cewek i kondensatorów) obwodu. Najczęściej w obwodach występujących w praktyce stopień mianownika jest nie mniejszy niż stopień licznika.

Pojęcie impedancji operatorowej jest uogólnieniem impedancji zespolonej elementów stosowanej w metodzie symbolicznej przy analizie stanów ustalonych w obwodzie zawierającym wymuszenia sinusoidalne. Łatwo pokazać to zakładając $s = j\omega$ we wzorach określających odpowiednie impedancje operatorowe. Dla elementów indukcyjnych i pojemnościowych przy założeniu $s = j\omega$ otrzymuje się następujące zależności

$$Z_L(s) \Big|_{s=j\omega} = j\omega L = Z_L(j\omega) \quad (15.8)$$

$$Z_M(s) \Big|_{s=j\omega} = \pm j\omega M = Z_M(j\omega) \quad (15.9)$$

$$Z_C(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega C} = Z_C(j\omega) \quad (15.10)$$

Impedancje $Z(j\omega)$ reprezentują impedancje symboliczne elementów RLC, obowiązujące w analizie stanów ustalonych przy wymuszeniach sinusoidalnych. Założenie $s=j\omega$ upraszcza zatem opis obwodu w stanie nieustalonym do opisu obwodu w stanie ustalonym przy założeniu wymuszenia sinusoidalnego.

15.3 Związek transmitancji operatorowej z opisem stanowym układu

Jak zostało pokazane w lekcji dziesiątej obwody liniowe RLC mogą być opisane w dziedzinie zmiennych stanu poprzez równanie stanu, którego postać macierzowa jest następująca

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (15.11)$$

Zmienna $\mathbf{x}$ jest wektorem zmiennych stanu, $\mathbf{u}$ wektorem wymuszeń napięciowych i prądowych występujących w obwodzie, $\mathbf{A}$ jest macierzą stanu a $\mathbf{B}$ – macierzą wymuszeń. Jeśli zbiór sygnałów wyjściowych obwodu oznaczmy w postaci wektora $\mathbf{y}$, to można je wyrazić jako kombinację liniową zmiennych stanu oraz wymuszeń. Oznacza to, że wektor wyjściowy $\mathbf{y}$ może być zapisany w postaci macierzowej

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (15.12)$$

Wielkości $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ występujące we wzorze stanowią również macierze o odpowiednich wymiarach.

W stosunku do opisu macierzowego (15.11) i (15.12) zastosujemy przekształcenie Laplace’a. Przy założeniu zerowych warunków początkowych i uwzględnieniu własności przekształcenia dotyczącej transformaty pochodnej, z równania (15.11) otrzymuje się

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (15.13)$$

Stąd

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (15.14)$$

Poddając również drugie równanie stanu (15.12) przekształceniu Laplace’a otrzymuje się

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \quad (15.15)$$

Po uwzględnieniu zależności (15.14) otrzymuje się

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(s) \quad (15.16)$$

Przy uwzględnieniu jednego wejścia (wymiar wektora $\mathbf{u}$ równy jeden) i jednego wyjścia (wymiar wektora $\mathbf{y}$ równy także jeden) wektor wyjściowy $\mathbf{Y}(s)$ staje się skłarem $Y(s)$, podobnie jak wymuszenie $U(s)$. Transmitancja operatorowa jest więc określona w postaci

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = [\mathbf{C}(s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D] \quad (15.17)$$

We wzorze tym macierz D uprościła się do skalar. Zauważmy, że mianownik transmitancji operatorowej jest równy wielomianowi charakterystycznemu macierzy $\mathbf{A}$, to jest

$$M(s) = \det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}) \quad (15.18)$$

Pierwiastki tego mianownika (bieguny układu) są tożsame z wartościami własnymi macierzy stanu $\mathbf{A}$. Wzór (15.17) stanowi związek między opisem stanowym układu a opisem operatorowym transmitancyjnym.

Przykład 15.2

Wyznaczyć opis transmitancyjny układu opisanego następującymi macierzami stanu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \quad 6], D = 2.$$

Na podstawie wzoru (15.17) otrzymuje się

$$T(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D] = \frac{2s^2 + 22s + 57}{s^2 + 8s + 13}$$

Wartości własne macierzy stanu, będące również biegunami układu są równe $s_1 = -5,73$, $s_2 = -2,27$.

15.4 Odpowiedź impulsowa i skokowa układu

Opis obwodu w dziedzinie zmiennej zespolonej s pozwala badać jego zachowanie przy pobudzeniu dowolnym wymuszeniem. Szczególnie ważne są właściwości dynamiczne obwodów (stan nieustalony) przy pobudzeniu za pomocą pewnych wymuszeń standardowych. Do takich wymuszeń należy impuls Diraca $\delta(t)$ oraz funkcja skoku jednostkowego $I(t)$.

15.4.1 Odpowiedź impulsowa

Odpowiedzią impulsową układu nazywamy jego odpowiedź czasową na wymuszenie w postaci impulsu Diraca przy zerowych warunkach początkowych obwodu. Dla wyznaczenia odpowiedzi impulsowej wykorzystuje się pojęcie transmitancji operatorowej $T(s)$. Transformata funkcji impulsowej Diraca jest równa 1, zatem obliczając odpowiedź obwodu przyjmujemy wymuszenie $X(s)=1$. Bezpośrednio z definicji transmitancji wynika

$$T(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Y(s)}{1} \rightarrow Y(s) = T(s) \quad (15.19)$$

Odpowiedź impulsowa układu jest transformatą odwrotną Laplace'a sygnału $Y(s)$. Stąd

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[T(s)] \quad (15.20)$$

Z powyższej zależności wynika, że odpowiedź impulsowa jest transformatą odwrotną Laplace'a transmitancji operatorowej $T(s)$ układu.

15.4.2 Odpowiedź skokowa

Odpowiedzią skokową układu nazywamy odpowiedź czasową tego układu na wymuszenie w postaci skoku jednostkowego $I(t)$ przy zerowych warunkach początkowych obwodu. Biorąc pod uwagę, że transformata Laplace'a funkcji jednostkowej $I(t)$ jest równa $1/s$ otrzymuje się

$$T(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Y(s)}{1/s} \rightarrow Y(s) = \frac{1}{s} T(s) \quad (15.21)$$

Odpowiedź skokowa jest transformatą odwrotną Laplace'a sygnału $Y(s)$. Stąd

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s} T(s)\right] \quad (15.22)$$

Odpowiedź skokowa układu jest więc transformatą odwrotną Laplace'a transmitancji operatorowej $T(s)$ tego układu, podzielonej przez zmienną zespoloną s . Podobnie jak

odpowieź impulsowa odpowieź skokowa jest określona w pełni przez transmitancję operatorową $T(s)$ układu.

Przykład 15.3

Dla zilustrowania rozważań teoretycznych obliczmy odpowieź impulsową i skokową układu o zadanej transmitancji operatorowej

$$T(s) = \frac{1}{(s+1)(s+5)}$$

Rozwiązanie

Stosując metodę residuów dla zadanej postaci transmitancji $T(s)$ otrzymujemy:

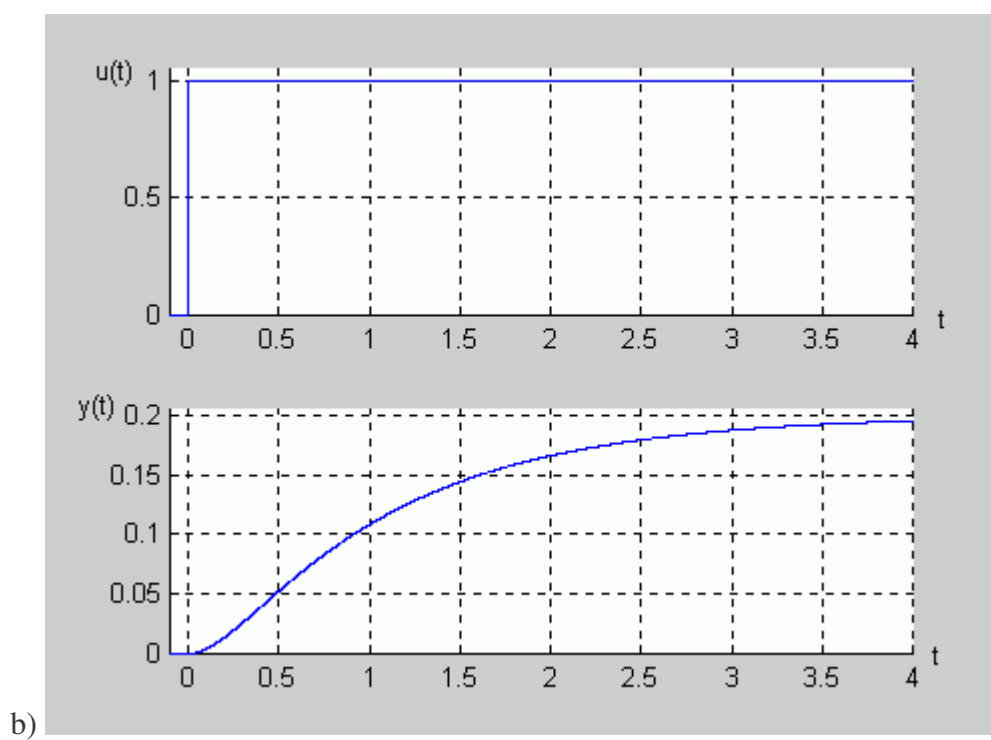
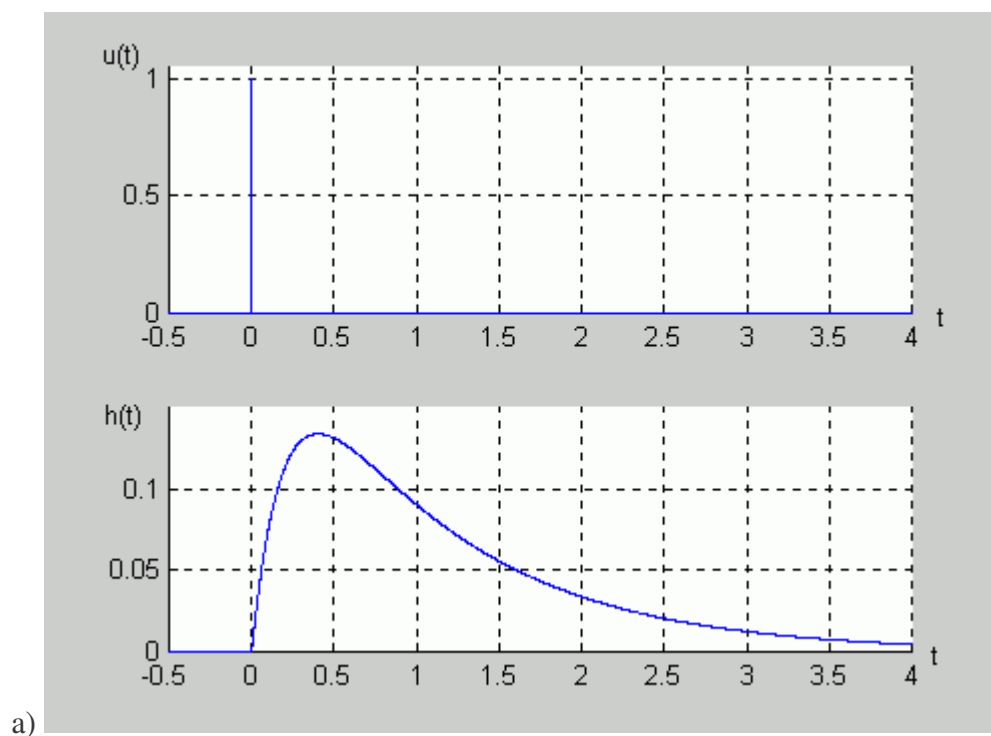
- odpowieź impulsową

$$y(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{(s+1)(s+5)} \right] = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{s+5} e^{st} + \lim_{s \rightarrow -5} \frac{1}{s+1} e^{st} = \frac{1}{4} e^{-t} - \frac{1}{4} e^{-5t}$$

- odpowieź skokową

$$y(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s(s+1)(s+5)} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(s+1)(s+5)} e^{st} + \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{s(s+5)} e^{st} + \lim_{s \rightarrow -5} \frac{1}{s(s+1)} e^{st} = 0,2 - 0,25e^{-t} + 0,05e^{-5t}$$

Na rys. 15.3 przedstawiono wykres czasowy odpowiedzi impulsowej (rys. 15.3a) i skokowej (rys. 15.3b) układu o zadanej postaci transmitancji operatorowej $T(s)$.



Rys. 15.3 Odpowiedzi a) impulsowa, b)skokowa układu



15.5 Stabilność układów liniowych

Opis układów liniowych za pomocą transmitancji operatorowej bądź równoważny mu opis równaniami stanu pozwala badać cechy jakościowe układu na podstawie analizy położenia jego biegunów (wartości własnych macierzy stanu). Do najważniejszych cech układu należą pojęcie stabilności oraz charakter odpowiedzi układu w stanie przejściowym na skutek przyłożenia wymuszenia zewnętrznego.

Stabilność układu jest rozumiana w sensie ograniczonej amplitudy odpowiedzi na wymuszenie o skończonej wartości. Układ nazywamy będziemy stabilnym, jeśli jego odpowiedź czasowa na skończoną wartość pobudzenia będzie ograniczona co do amplitudy. Stabilność wymaga, aby przy zaniku pobudzenia odpowiedź układu w stanie ustalonym przy $t \rightarrow \infty$ była ograniczona co do amplitudy (stabilność w sensie zwykłym) lub zerowa (stabilność w sensie asymptotycznym). Oznacza to, że dla układów stabilnych odpowiedź w stanie przejściowym powinna zanikać do zera lub co najmniej nie narastać, pozostając na ustalonym poziomie.

Stabilność układu może więc być oceniana na podstawie odpowiedzi impulsowej. Jeśli odpowiedź ta zanika do zera lub pozostaje na stałym poziomie przy $t \rightarrow \infty$ układ jest stabilny. Jeśli natomiast odpowiedź impulsowa ma charakter narastający w czasie – układ jest niestabilny. Zauważmy, że odpowiedź impulsowa jest transformatą odwrotną Laplace’a transmitancji operatorowej

$$y(t) = L^{-1}[T(s)] \quad (15.23)$$

Jeśli bieguny układu oznaczmy przez s_i gdzie $i = 1, 2, \dots, n$, wówczas w przypadku biegunów jednokrotnych na podstawie metody residuów odpowiedź impulsowa może być wyrażona wzorem

$$y(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{s_i t} \quad (15.24)$$

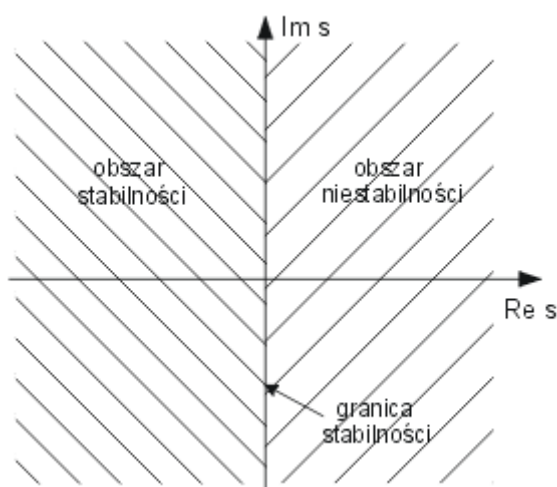
Wzór ten dowodzi, że jeśli wszystkie bieguny układu są położone wyłącznie w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s , $R(s_i) \leq 0$, wówczas odpowiedź impulsowa zanika z czasem do zera lub pozostaje ograniczona co do amplitudy (gdy część biegunów lub wszystkie znajdują się na osi urojonej).

Sytuacja jest nieco bardziej złożona, gdy część biegunów jest wielokrotna. Dla uproszczenia ograniczymy się tylko do biegunów dwukrotnych. Załóżmy, że liczba takich dwukrotnych biegunów jest równa m . W takim przypadku zastosowanie wzorów na residuum przy obliczaniu transformaty odwrotnej prowadzi do wyniku

$$y(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{s_i t} + \sum_{k=1}^m B_k t e^{s_k t} \quad (15.25)$$

Przy niezerowej wartości części rzeczywistej biegunów położonych w lewej półpłaszczyźnie odpowiedź przejściowa układu przy $t \rightarrow \infty$ będzie zanikać do zera (układ stabilny asymptotycznie). Przy położeniu biegunów na osi urojonej $R(s_i) = 0$ układ może być stabilny (choć nie asymptotycznie), jeśli są to bieguny pojedyncze lub niestabilny, jeśli bieguny są wielokrotne. Utrata stabilności na skutek położenia bieguna wielokrotnego na osi urojonej wynika z pojawienia się we wzorze na odpowiedź impulsową czynnika proporcjonalnego do czasu. Zauważmy, że przy spełnieniu warunku $\text{Re}(s_k) = 0$ i założeniu bieguna zespolonego $s_k = j\omega$ wyrażenie $B_k t e^{s_k t}$ może być rozwinięte do postaci $B_k t e^{s_k t} = B_k t (\cos \omega t + j \sin \omega t)$. Wobec ograniczonych wartości funkcji sinus i cosinus czynnik ten przy $t \rightarrow \infty$ narasta nieograniczenie, co prowadzi do utraty stabilności.

W konsekwencji warunkiem stabilności układu jest położenie biegunów w lewej półpłaszczyźnie, a w przypadku biegunów wielokrotnych wyłączenie ich z osi urojonej.

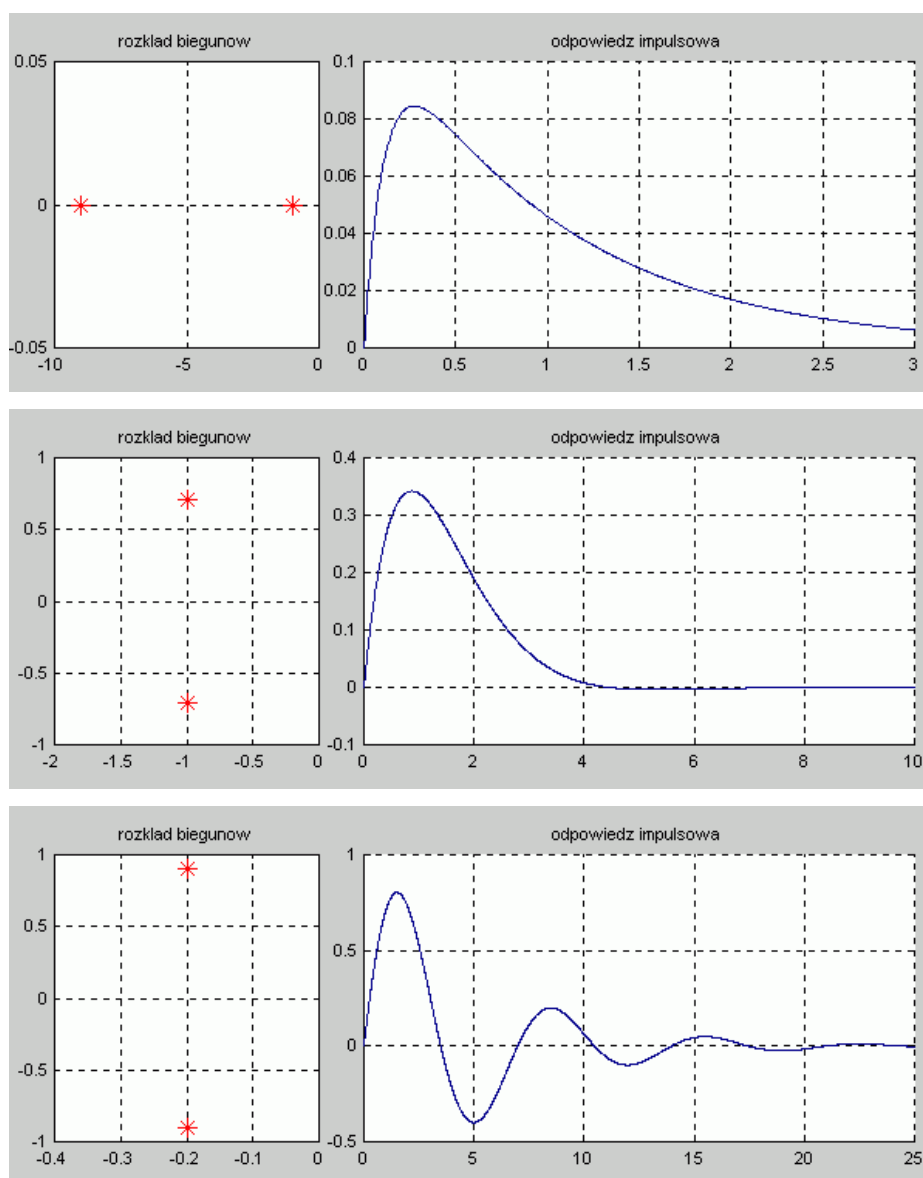


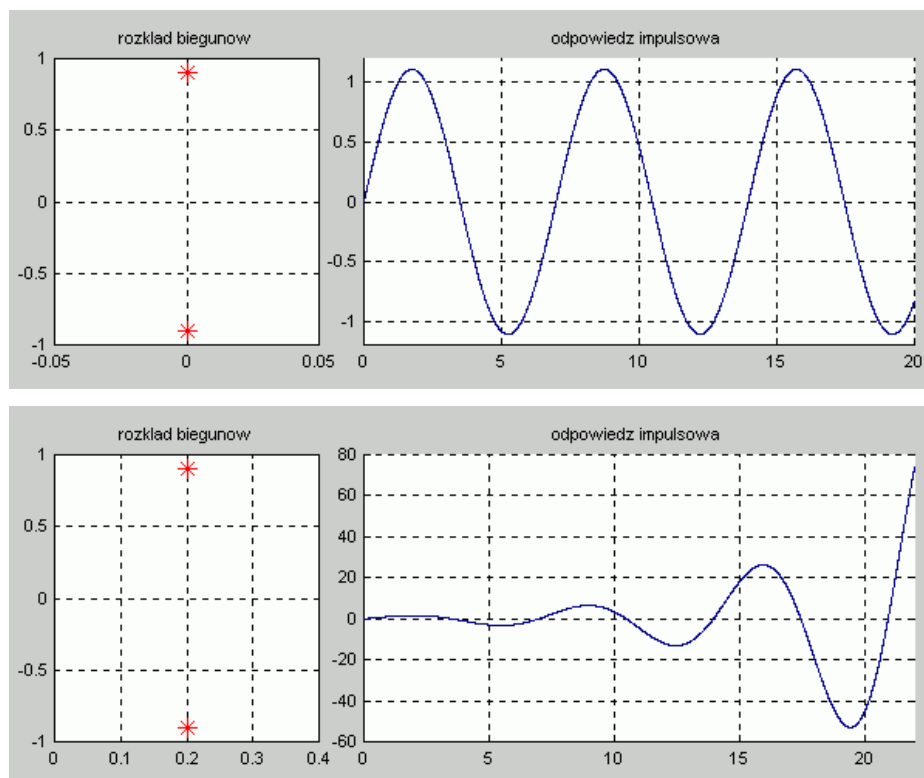
Rys. 15.4. Zależność stabilności układu od położenia biegunów



Na rys. 15.4 zilustrowano wpływ położenia biegunów na stabilność układu. Oś urojona rozgraniczająca obszar stabilny od niestabilnego jest obszarem warunkowo stabilnym (stabilny w sensie zwykłym przy biegunach jednokrotnych i niestabilny przy biegunach wielokrotnych).

Interesujący jest również wpływ położenia biegunów na charakter odpowiedzi impulsowej układu liniowego. Rys. 15.5 przedstawia odpowiedzi impulsowe układu drugiego rzędu przy różnych położeniach biegunów.





Rys. 15.5 Odpowiedzi impulsowe układu drugiego rzędu przy różnych położeniach biegunów

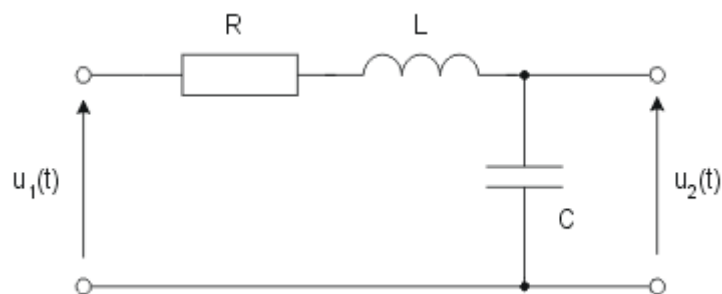


W zależności od wartości biegunów mamy do czynienia ze stanem aperiodycznym (bieguny położone na osi rzeczywistej) oraz oscylacyjnym (bieguny zespolone). Zanikanie odpowiedzi impulsowej do zera świadczy o stabilności asymptotycznej układu. Odpowiedź o ograniczonej amplitudzie nie zanikająca z czasem świadczy o stabilności zwykłej układu. Odpowiedź narastająca z czasem jest cechą układu niestabilnego.

Zadania sprawdzające

Zadanie 15.1

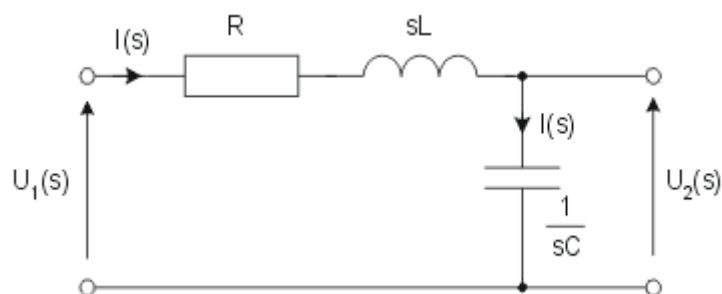
Wyznaczyć transmitancję operatorową typu napięciowego obwodu z rys. 15.6. Założyć: $R = 1\Omega$, $L = 2H$, $C = 1F$.



Rys. 15.6. Schemat obwodu do zadania 15.1

Rozwiązanie

Schemat operatorowy obwodu przy zerowych warunkach początkowych stosowany do wyznaczenia transmitancji przedstawiony jest na rys. 15.7



Rys. 15.7. Postać operatorowa obwodu

Kolejne etapy wyznaczania transmitancji:

Prąd $I(s)$

$$I(s) = \frac{U_1(s)}{R + sL + 1/sC} = \frac{sC}{s^2 LC + sRC + 1} U_1(s)$$

Napięcie wyjściowe

$$U_2(s) = \frac{1}{sC} I(s) = \frac{1}{s^2 LC + sRC + 1} U_1(s)$$

Transmitancja napięciowa

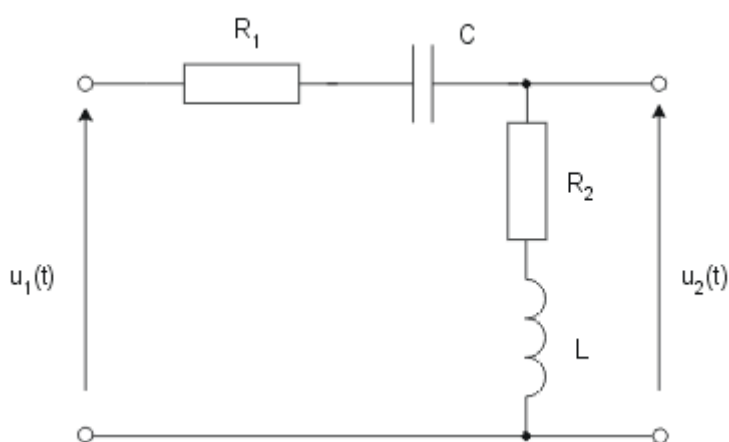
$$T_u(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1/LC}{s^2 + sR/L + 1/LC}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymuje się

$$T_u(s) = \frac{0,5}{s^2 + 0,5s + 0,5}$$

Zadanie 15.2

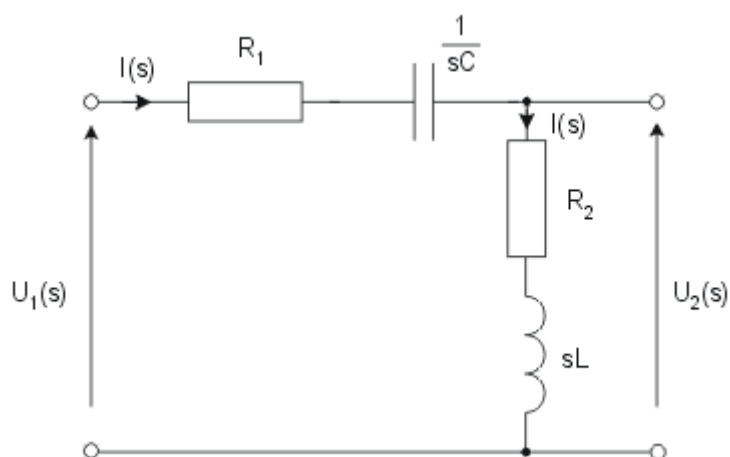
Wyznaczyć odpowiedź impulsową i skokową dla obwodu przedstawionego na rys. 15.8. Odpowiedzi dotyczą napięcia wyjściowego obwodu przy zasilaniu napięciowym. Założyć następujące wartości elementów: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 1\Omega$, $L = 2H$, $C = 0,5F$.



Rys. 15.8. Schemat obwodu do zadania 15.2

Rozwiązanie

Schemat operatorowy obwodu przy zerowych warunkach początkowych stosowany do wyznaczenia transmitancji przedstawiony jest na rys. 15.9



Rys. 15.9. Postać operatorowa obwodu

Kolejne etapy wyznaczania transmitancji:

Prąd $I(s)$

$$I(s) = \frac{U_1(s)}{R_1 + R_2 + sL + 1/sC} = \frac{sC}{s^2LC + sC(R_1 + R_2) + 1} U_1(s)$$

Napięcie wyjściowe

$$U_2(s) = (R_2 + sL)I(s)$$

Transmitancja napięciowa

$$T_u(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{(sL + R_2)sC}{s^2LC + sC(R + R_2) + 1}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymuje się

$$T_u(s) = \frac{s^2 + 0,5s}{s^2 + s + 1}$$

Odpowiedź impulsowa określona będzie przy zastosowaniu metody korzystającej z tablic transformat. W związku z powyższym

$$T_u(s) = 1 - \frac{0,5s + 1}{s^2 + s + 1} = 1 - \frac{0,5(s + 0,5) + (\sqrt{3/4})^2}{(s + 0,5)^2 + (\sqrt{3/4})^2}$$

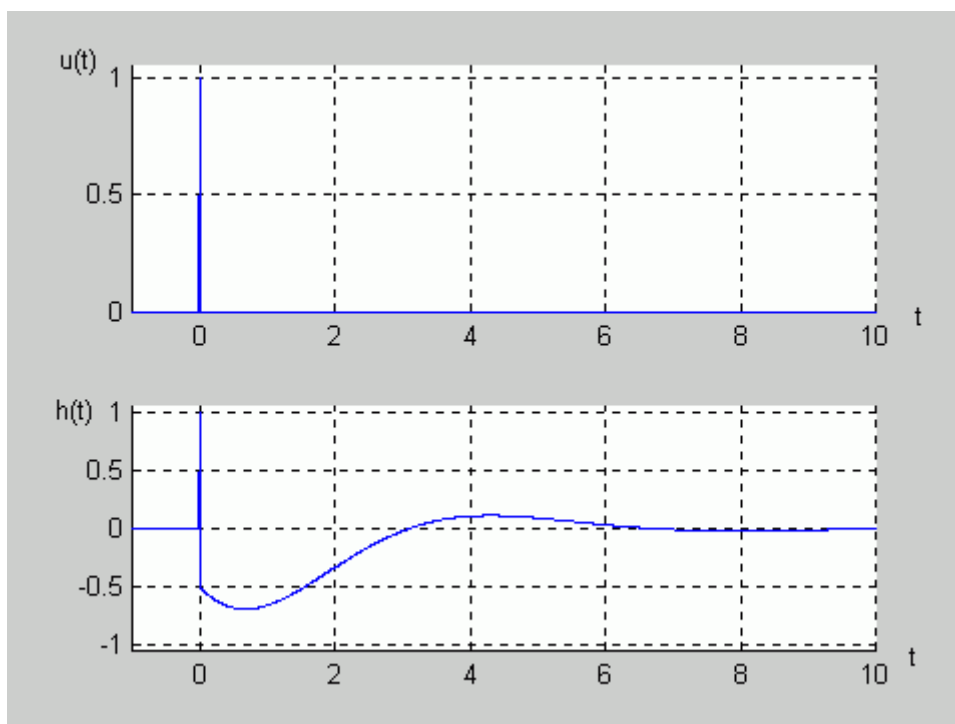
$$y(t) = L^{-1}[T_u(s)] = \delta(t) - 0,5e^{-0,5t} \cos(\sqrt{3/4}t) - e^{-0,5t} \sin(\sqrt{3/4}t)$$

Odpowiedź skokowa

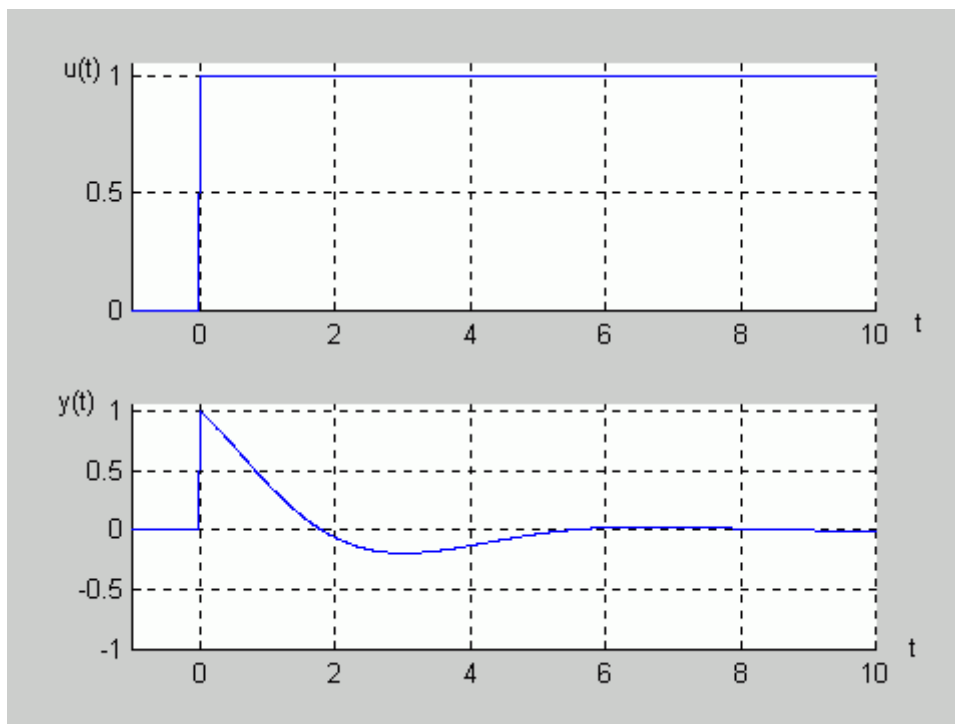
$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{T_u(s)}{s}\right] = L^{-1}\left[\frac{s+0,5}{s^2+s+1}\right] = L^{-1}\left[\frac{(s+0,5)}{(s+0,5)^2 + (\sqrt{3}/4)^2}\right] = e^{-0,5t} \cos(\sqrt{3}/4t)$$

Odpowiedzi impulsowa i skokowa układu podane są na rys. 15.10

a) odpowiedź impulsowa



b) odpowiedź skokowa

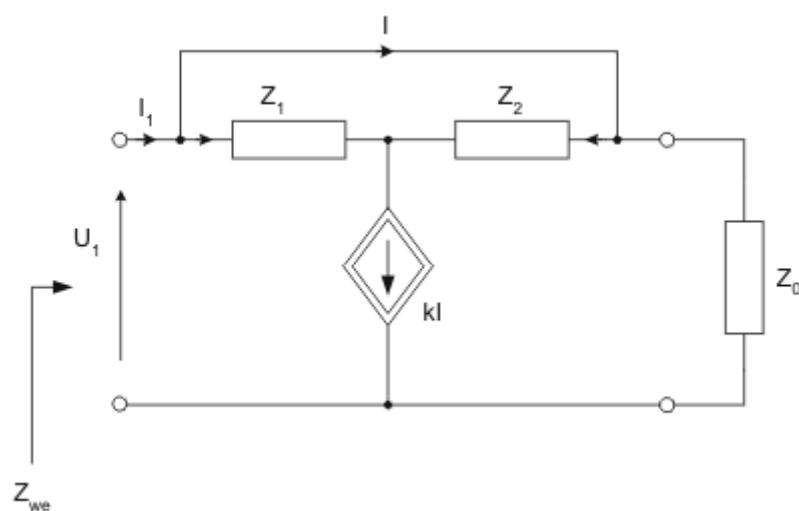


Rys. 15.10. Odpowiedzi impulsowa i skokowa układu



Zadanie 15.3

Wyznaczyć impedancję wejściową w postaci operatorowej dla obwodu przedstawionego na rys. 15.11. Impedancję wejściową potraktować jako transmitancję napięciowo-prądową.



Rys. 15.11. Schemat obwodu do zadania 15.3

Rozwiązanie

Z prawa prądowego i napięciowego Kirchhoffa napisanych dla obwodu z rys. 15.11 otrzymuje się

$$\begin{aligned} -U_1 + Z_1(I_1 - I) &= Z_2(I - Y_o U_1) - U_1 \\ (I_1 - I) + (I - Y_o U_1) &= kI \end{aligned}$$

gdzie $Y_o = 1/Z_o$. Z równania drugiego otrzymuje się

$$I = \frac{I_1 - Y_o U_1}{k}$$

Po podstawieniu do wzoru pierwszego otrzymujemy

$$\frac{Z_1 + Z_2 - Z_1 k}{k} I_1 = \left(Z_2 Y_o + \frac{Z_1 + Z_2}{k} Y_o \right) U_1$$

Stąd

$$Z_{we} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{Z_1 + Z_2 - Z_1 k}{k Z_2 Y_o + Y_o (Z_1 + Z_2)}$$

Lekcja 16. Charakterystyki częstotliwościowe układów

Wstęp

Transmitancja operatorowa poza odpowiedziami czasowymi pozwala również wyznaczyć charakterystyki obwodu w stanie ustalonym przy wymuszeniu sinusoidalnym o zmiennej wartości częstotliwości.

W lekcji szesnastej skupimy się na charakterystykach częstotliwościowych obwodów RLC. Podane zostaną definicje charakterystyki amplitudowej i fazowej oraz logarytmicznej charakterystyki amplitudowej a także sposób ich wyznaczania na podstawie transmitancji operatorowej. Rozważone zostaną przykłady charakterystyk częstotliwościowych układów pierwszego rzędu: członu całkującego i różniczkującego oraz przesuwnika fazowego. Zdefiniowane zostaną podstawowe transmitancje operatorowe drugiego rzędu, opisujące filtry bikwadratowe typu dolnoprzepustowego, środkowoprzepustowego oraz górnoprzepustowego. Przedstawione zostaną charakterystyki częstotliwościowe odpowiadające tym filtrom oraz przeanalizowany zostanie wpływ dobroci filtru na kształt charakterystyk częstotliwościowych.



16.1 Definicje charakterystyk częstotliwościowych

Charakterystyką częstotliwościową układu nazywać będziemy zależność wartości sygnału wyjściowego tego układu od częstotliwości przy jednostkowym wymuszeniu sinusoidalnym przyłożonym na wejście układu. Charakterystykę tę można wyznaczyć bezpośrednio na podstawie transmitancji operatorowej $T(s)$. Nosi ona nazwę **transmitancji widmowej** układu. Oznaczmy transmitancję widmową w postaci $T(j\omega)$. Łatwo pokazać, że jest ona zdefiniowana jako transmitancja operatorowa dla $s = j\omega$, to znaczy

$$T(j\omega) = T(s) \Big|_{s=j\omega} \quad (16.1)$$

Transmitancja widmowa reprezentuje sobą liczbę zespoloną będącą funkcją pulsacji ω . Przedstawiając ją w postaci wykładniczej, to jest $T(j\omega) = |T(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$ można zdefiniować dwa rodzaje charakterystyk częstotliwościowych:

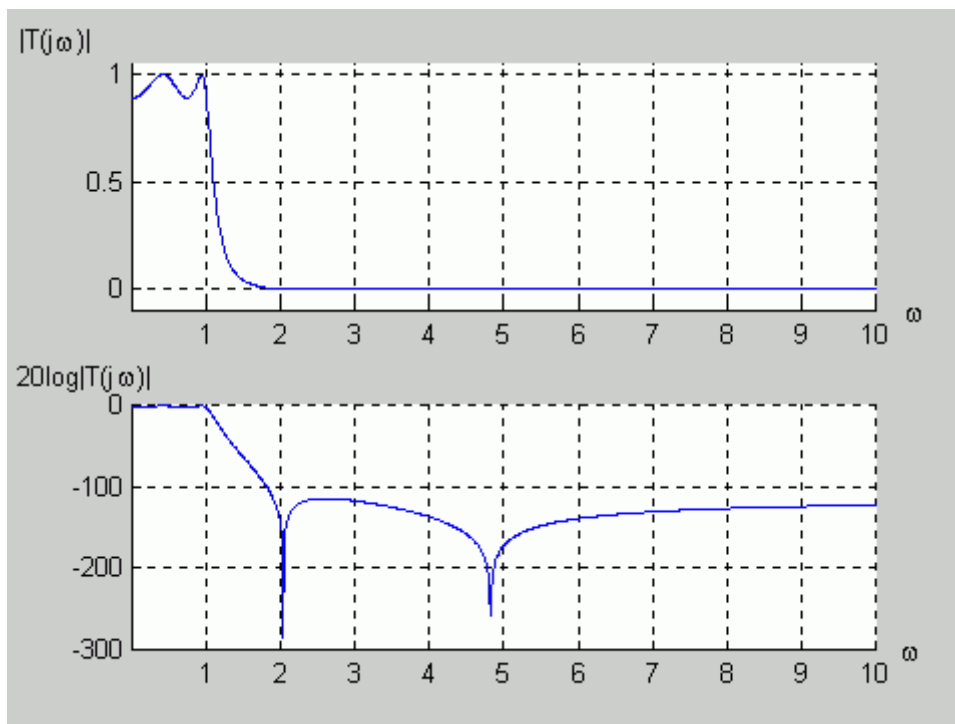
- **charakterystyka amplitudowa** przedstawia sobą zależność modułu transmitancji widmowej $T(j\omega)$ od pulsacji ω (częstotliwości f), to jest $|T(j\omega)|$
- **charakterystyka fazowa** określa zależność argumentu transmitancji widmowej $T(j\omega)$ od pulsacji (częstotliwości) to jest $\varphi(\omega)$. Charakterystyka fazowa reprezentuje sobą przesunięcie fazowe między sygnałem wejściowym a wyjściowym dla danej pulsacji ω .

Charakterystyki częstotliwościowe przedstawia się zwykle na wykresie modułu lub fazy w zależności od pulsacji (częstotliwości). Jeśli wielkości podlegające wykreślaniu różnią się znacznie pod względem wartości (np. zmieniają się w zakresie od 1 do 10^6) wygodnie jest wprowadzić skalę logarytmiczną zwykle o podstawie 10. Dotyczy to określonego zakresu częstotliwości. W przypadku charakterystyki amplitudowej skalę logarytmiczną przelicza się na decybele (dB) definiując **logarytmiczną charakterystykę amplitudową**

$$20\log_{10}(|T(j\omega)|) \quad (16.2)$$

Na rys. 16.1 przedstawiono przykładowo charakterystykę amplitudową (rys. 16.1a) oraz logarytmiczną charakterystykę amplitudową (rys. 16.1b) odpowiadającą tej samej transmitacji danej wzorem

$$T(s) = \frac{0.003s^4 + 0.082s^2 + 0.287}{s^4 + 0.945s^3 + 1.487s^2 + 0.778s + 0.322}$$



Rys. 16.1. Postać liniowa (a) oraz logarytmiczna (b) charakterystyki amplitudowej odpowiadającej transmitancji $T(s)$

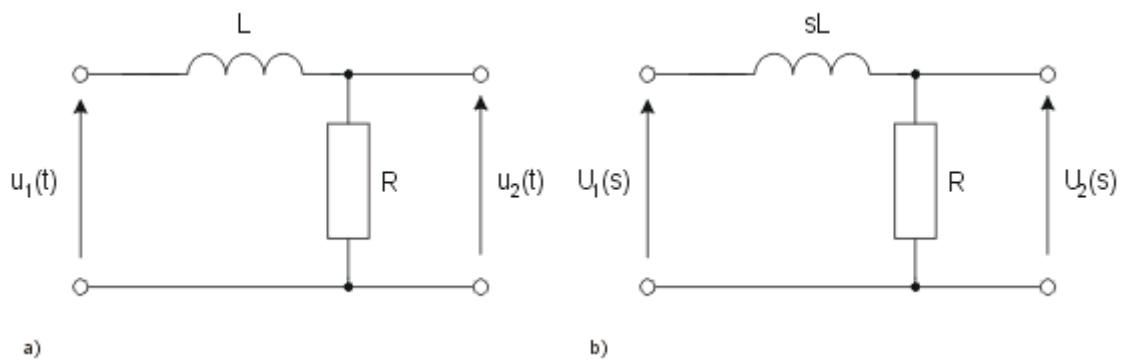


Każdy rodzaj przedstawienia charakterystyki amplitudowej podkreśla inne szczegóły w jej przebiegu. Charakterystyka logarytmiczna podkreśla stosunkowo niewielkie w skali globalnej zmiany dynamiczne w tak zwanym paśmie zaporowym, gdzie amplituda sygnału jest bardzo mała w stosunku do pasma przepustowego, podczas gdy skala liniowa uwypukla globalny charakter przebiegu tracąc drobne szczegóły w zakresie częstotliwości gdzie wartości sygnałów są małe.

Jeśli badany zakres częstotliwości jest bardzo szeroki (np. od 1Hz do 1MHz) wygodnie jest wprowadzić skalę logarytmiczną również dla częstotliwości. Charakterystykę fazową wykreśla się zwykle w skali liniowej dla fazy i liniowej lub logarytmicznej dla częstotliwości (pulsacji).

Przykład 16.1

Wyznaczyć charakterystyki częstotliwościowe transmitancji napięciowej układu RL przedstawionego na rys. 16.2a



Rys. 16.2 Schematy obwodu do przykładu 16.1: a) schemat rzeczywisty,
b) postać operatorowa obwodu

Rozwiązanie

Zastępując elementy rzeczywiste poprzez ich impedancje operatorowe otrzymuje się kolejno:

$$U_2(s) = \frac{R}{R + sL} U_1(s) = \frac{R/L}{s + R/L} U_1(s)$$

$$T(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R/L}{s + R/L}$$

Podstawiając $s = j\omega$ do powyższej zależności otrzymuje się

$$T(j\omega) = \frac{R/L}{j\omega + R/L} = \frac{R/L}{\sqrt{\omega^2 + (R/L)^2}} e^{-j \arctg(\omega L/R)}$$

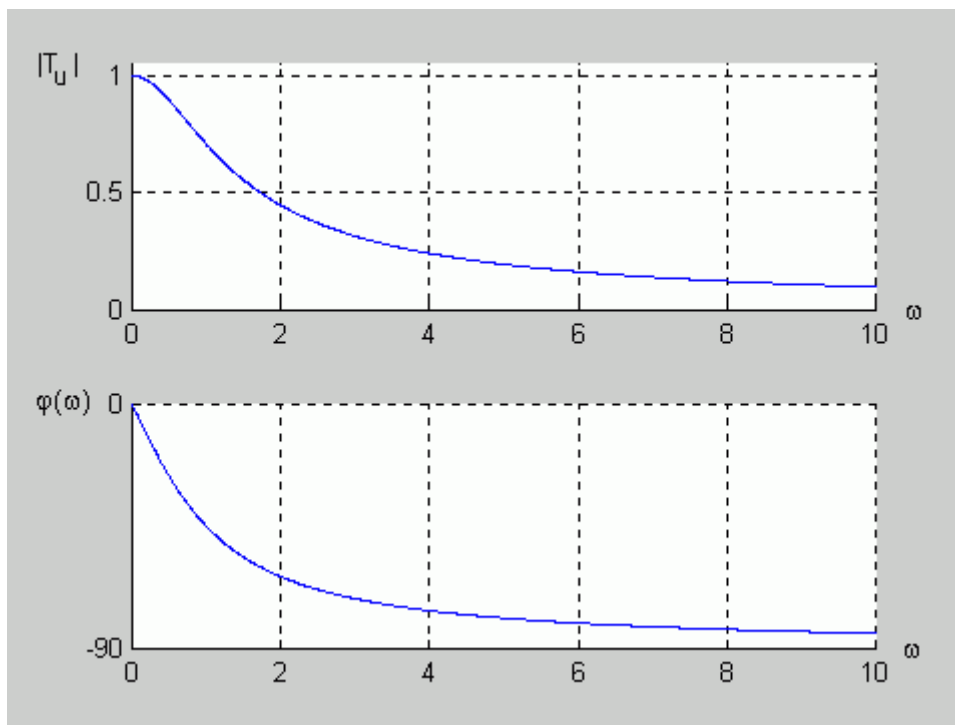
Charakterystyka amplitudowa układu określona jest więc zależnością

$$|T(j\omega)| = \frac{R/L}{\sqrt{\omega^2 + (R/L)^2}}$$

a charakterystykę fazową opisuje wzór

$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega L/R)$$

Rys. 16.3 przedstawia wykresy charakterystyki amplitudowej i fazowej obwodu o wartościach $R=1\Omega$ i $L=1H$ w funkcji pulsacji ω .



Rys. 16.3. Wykres charakterystyki amplitudowej i fazowej układu



Charakterystyka amplitudowa wskazuje na dobre (nie tłumione) przenoszenie częstotliwości małych. W miarę wzrostu wartości częstotliwości charakterystyka amplitudowa maleje, co oznacza, że sygnał wyjściowy ma coraz mniejszą amplitudę. Taki obwód ma więc charakter układu dolnoprzepustowego (szeregowo włączona cewka w miarę wzrostu częstotliwości ma coraz większą impedancję tłumiącą przebieg prądu przepływającego przez rezystor wyjściowy).

16.2 Przykłady transmitancji operatorowych pierwszego rzędu

W praktyce inżynierskiej zdefiniowano wiele użytecznych postaci transmitancji operatorowych. Tutaj ograniczymy się jedynie do trzech najprostszych transmitancji pierwszego rzędu: układu całkującego, różniczkującego oraz przesuwnika fazowego.

16.2.1 Układ całkujący

Transmitancja idealnego układu całkującego definiowana jest w postaci

$$T(s) = k / s \quad (16.3)$$

Układ nosi nazwę całkującego, gdyż operator $1/s$ w dziedzinie częstotliwości zespolonej Laplace'a oznacza całkowanie funkcji w dziedzinie czasu. Charakterystykę częstotliwościową układu całkującego opisuje zależność

$$T(j\omega) = k / j\omega = \frac{k}{\omega} e^{-j90^\circ} \quad (16.4)$$

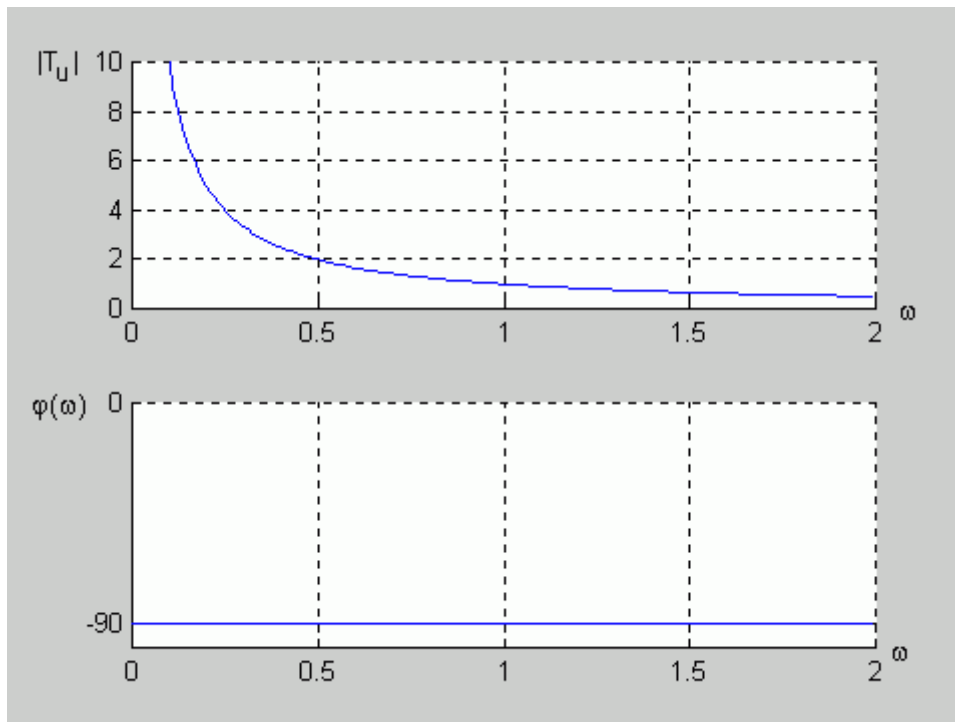
Wykres charakterystyki amplitudowej

$$|T(j\omega)| = \frac{k}{\omega} \quad (16.5)$$

oraz fazowej

$$\varphi(\omega) = -90^\circ \quad (16.6)$$

dla układu całkującego przy $k > 0$ przedstawiono na rys. 16.4.



Rys. 16.4 Charakterystyki częstotliwościowe układu całkującego: a) amplitudowa, b) fazowa



Charakterystyka amplitudowa jest typu hiperbolicznego, a charakterystyka fazowa stała (przesunięcie fazowe stałe i równe -90° niezależnie od częstotliwości).

16.2.2 Układ różniczkujący

Transmitancja układu różniczkującego dana jest w postaci

$$T(s) = ks \quad (16.7)$$

Układ nosi nazwę różniczkującego, gdyż operator s w dziedzinie częstotliwości zespolonej oznacza różniczkowanie funkcji w dziedzinie czasu. Charakterystyka częstotliwościowa opisana jest zależnością

$$T(j\omega) = kj\omega = k\omega e^{j90^\circ} \quad (16.8)$$

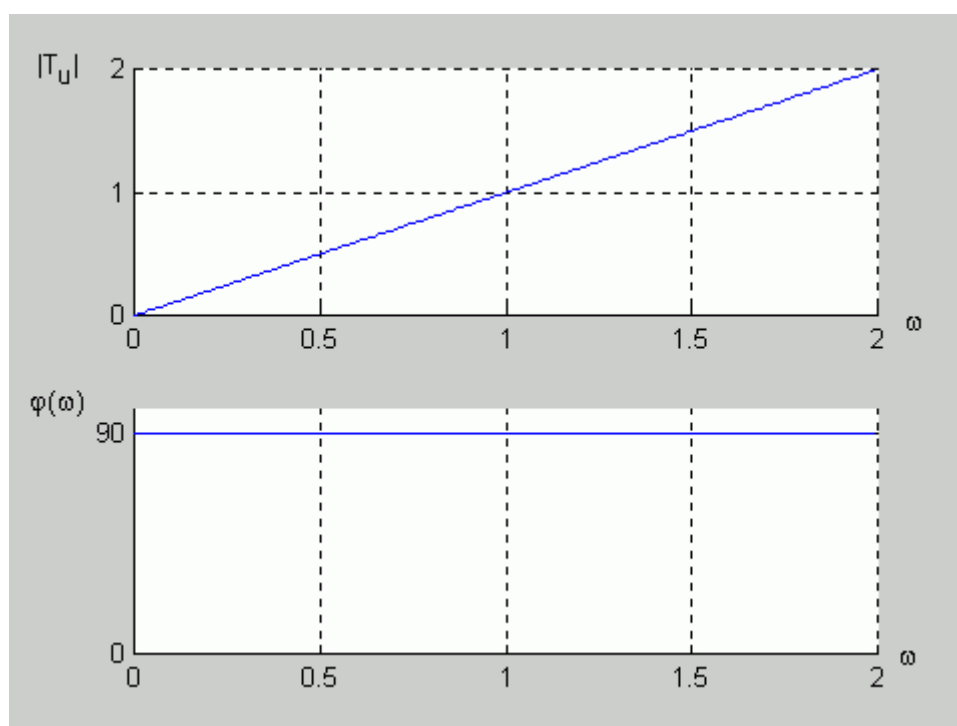
Charakterystyka amplitudowa jest funkcją liniową

$$|T(j\omega)| = k\omega \quad (16.9)$$

a charakterystyka fazowa stała, niezależnie od częstotliwości

$$\varphi(\omega) = 90^\circ \quad (16.10)$$

Wykres obu charakterystyk układu różniczkującego przy $k>0$ przedstawiono na rys. 16.5.



Rys. 16.5 Charakterystyki częstotliwościowe układu różniczkującego: a) amplitudowa,
b) fazowa



16.2.3 Przesuwnik fazowy

Przesuwnik fazowy jest układem przesuwającym fazę napięcia wyjściowego względem wejściowego bez zmiany amplitudy sygnału. Transmitancję przesuwника fazowego określa zależność

$$T(s) = \frac{-s + a}{s + a} \quad (16.11)$$

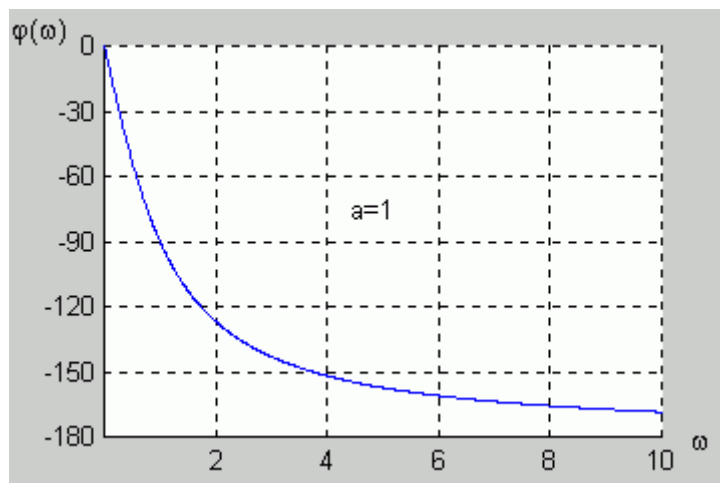
Charakterystyka częstotliwościowa przesuwника określona jest następującą relacją

$$T(j\omega) = \frac{-j\omega + a}{j\omega + a} = \frac{\sqrt{\omega^2 + a^2}}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} \cdot \frac{e^{-j\phi(\omega)}}{e^{j\phi(\omega)}} = 1e^{-j2\phi(\omega)} \quad (16.12)$$

gdzie kąt $\phi(\omega)$ określony jest wzorem $\phi(\omega) = \arctg\left(\frac{\omega}{a}\right)$. Powyższa zależność potwierdza, że przesuwnik fazowy nie zmienia amplitudy sygnału wejściowego ($|T(j\omega)|=1$) a wpływa jedynie na przesunięcie fazowe między sygnałem wejściowym i wyjściowym. Charakterystyka fazowa przesuwника określona jest zależnością

$$\varphi(\omega) = -2\arctg\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (16.13)$$

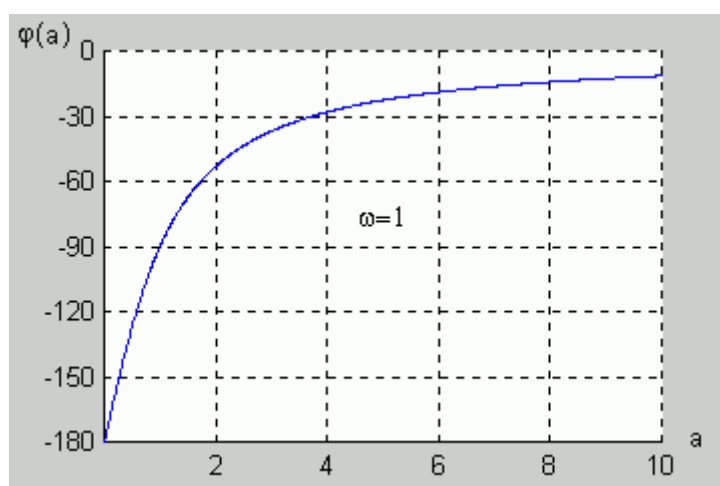
Na rys. 16.6 przedstawiono wykres charakterystyki fazowej przesuwника o transmitancji (16.11) w funkcji pulsacji dla wartości $a=1$.



Rys. 16.6. Charakterystyka fazowa przesuwnika w funkcji pulsacji



Przesunięcie fazowe układu jest funkcją częstotliwości i zmienia się od zera do wartości 180° . Wartość przesunięcia fazowego dla konkretnej wartości częstotliwości można regulować poprzez zmianę współczynnika a transmitancji. Na rys. 16.7 przedstawiono wykres przedstawiający zmianę kąta przesunięcia fazowego układu dla pulsacji jednostkowej przy zmianie wartości współczynnika a .



Rys. 16.7. Charakterystyka fazowa przesuwnika w funkcji wartości współczynnika a



16.3 Transmitancje operatorowe układów drugiego rzędu

16.3.1 Postać ogólna transmitancji bikwadratowej

Szczególnym przypadkiem transmitancji operatorowej jest transmitancja drugiego rzędu, zwana **bikwadratową**, szczególnie często wykorzystywana w teorii filtrów. Ogólna postać tej transmitancji dana jest wzorem

$$T(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (16.14)$$

W przypadku wykorzystania tej transmitancji w teorii filtrów wielomiany licznika i mianownika zakłada się w specjalnej postaci. W przypadku mianownika przyjmuje się

$$M(s) = s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2 \quad (16.15)$$

Wielkość ω_0 jest pulsacją środkową (rezonansową) filtru a Q dobrocią. Postać licznika transmitancji jest uzależniona od rodzaju filtru. Tutaj rozpatrzmy przykładowo trzy podstawowe rodzaje filtrów i ich transmitancje. Są to

- Filtr dolnoprzepustowy

$$T_{DP}(s) = \frac{A_{DP} \omega_0^2}{M(s)} \quad (16.16)$$

Wielkość A_{DP} jest wzmocnieniem filtru w paśmie przepustowym i mierzona jest dla $s = 0$.

- Filtr środkowoprzepustowy

$$T_{SP}(s) = \frac{A_{SP} \frac{\omega_0}{Q} s}{M(s)} \quad (16.17)$$

Wielkość A_{SP} jest wzmocnieniem filtru w paśmie przepustowym i mierzona jest dla pulsacji $s = j\omega_0$.

- Filtr górnoprzepustowy

$$T_{SP}(s) = \frac{A_{GP}s^2}{M(s)} \quad (16.18)$$

Wielkość A_{GP} jest wzmocnieniem filtra w paśmie przepustowym i mierzona jest dla pulsacji równej $s = \infty$.

Charakterystyki częstotliwościowe filtrów otrzymuje się po wstawieniu $s = j\omega$ do transmitancji operatorowej odpowiadającej danemu rodzajowi filtra. Moduł zależności wyznacza charakterystykę amplitudową a kąt fazowy – charakterystykę fazową.

16.3.2 Charakterystyki częstotliwościowe filtra dolnoprzepustowego

Po wstawieniu zależności $s = j\omega$ do wzoru na transmitancję $T_{DP}(s)$ otrzymuje się charakterystykę filtra dolnoprzepustowego w postaci

$$T_{DP}(j\omega) = \frac{A_{DP}\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega\omega_0}{Q}} \quad (16.19)$$

Jest to funkcja zespolona pulsacji. Moduł tej funkcji stanowi charakterystykę amplitudową a faza – charakterystykę fazową układu. Charakterystyki te wyrażone są w postaci

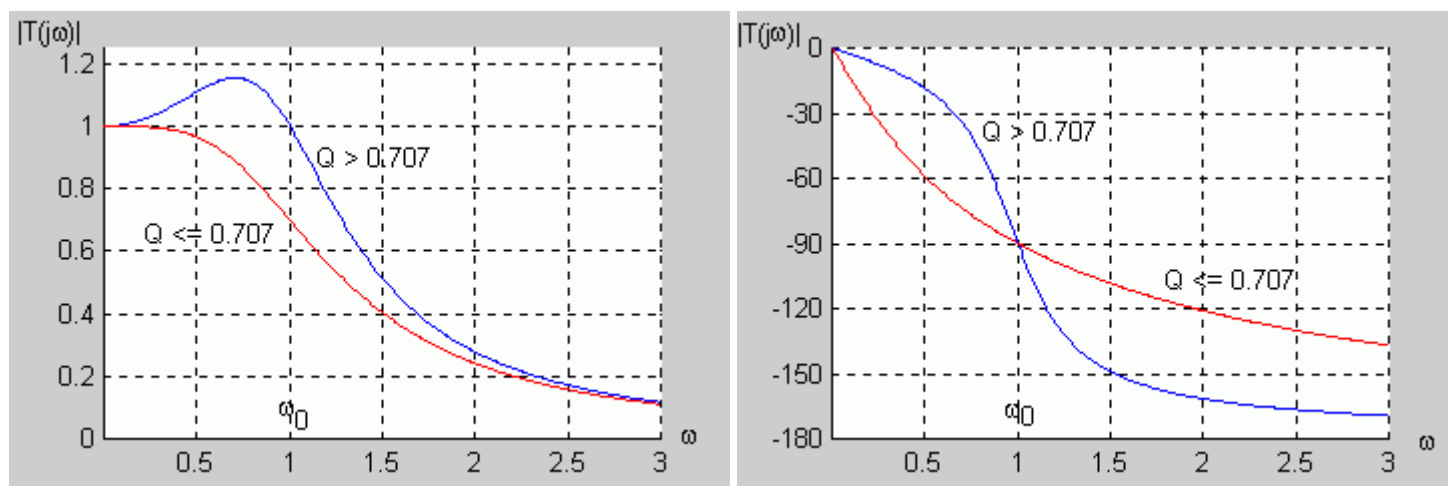
- charakterystyka amplitudowa

$$|T_{DP}(j\omega)| = \frac{A_{DP}\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}} \quad (16.20)$$

- charakterystyka fazowa

$$\varphi(j\omega) = -\arctg \frac{\omega\omega_0}{Q(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (16.21)$$

Na rys. 16.8a przedstawiono typowe charakterystyki amplitudowe a na rys. 16.8b charakterystyki fazowe filtra dolnoprzepustowego drugiego rzędu dla dwu różnych dobroci: $Q > 1/\sqrt{2}$ oraz $Q \leq 1/\sqrt{2}$.



a)

b)

Rys. 16.8. Charakterystyki częstotliwościowe filtra bikwadratowego dolnoprzepustowego:

a) amplitudowe, b) fazowe



Dla dobroci $Q > 1/\sqrt{2}$ charakterystyka amplitudowa jest niemonotoniczna i osiąga maksimum dla pulsacji

$$\omega_m = \omega_0 \sqrt{1 - 1/2Q^2} \quad (16.22)$$

Dla dobroci $Q \leq 1/\sqrt{2}$ przebieg charakterystyki amplitudowej staje się monotoniczny (pulsacja ω_m przyjmuje wartość nierzeczywistą – urojoną). Przy $Q = 1/\sqrt{2}$ charakterystyka jest maksymalnie płaska.

Pulsacja ω_m (jeśli jest określona) jest różna od pulsacji środkowej ω_0 . Jak z charakterystyk częstotliwościowych widać pulsacja środkowa odpowiada wartości przy której przesunięcie fazowe układu jest równe -90 stopni. Może być więc łatwo wyznaczona z charakterystyki fazowej. Dobroć układu można z kolei prosto wyznaczyć wykorzystując postać charakterystyki amplitudowej. Obliczając ją dla dwu wartości częstotliwości: zerowej i środkowej otrzymuje się

$$Q = \frac{|T_{DP}(j\omega_0)|}{|T_{DP}(0)|} \quad (16.23)$$

Wyznaczenie dobroci na podstawie charakterystyk częstotliwościowych polega więc na określeniu wartości charakterystyki amplitudowej dla dwu częstotliwości: zerowej i środkowej a następnie podstawieniu tych wartości do powyższego wzoru.

16.3.3 Charakterystyki częstotliwościowe filtra środkowoprzepustowego

Po wstawieniu zależności $s = j\omega$ do wzoru na transmitancję $T_{SP}(s)$ otrzymuje się charakterystykę częstotliwościową filtra środkowoprzepustowego w postaci

$$T_{SP}(j\omega) = \frac{jA_{SP} \frac{\omega\omega_0}{Q}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega\omega_0}{Q}} \quad (16.24)$$

Jest to funkcja zespolona pulsacji. Moduł tej funkcji stanowi charakterystykę amplitudową a faza – charakterystykę fazową układu. Charakterystyki te wyrażone są w postaci

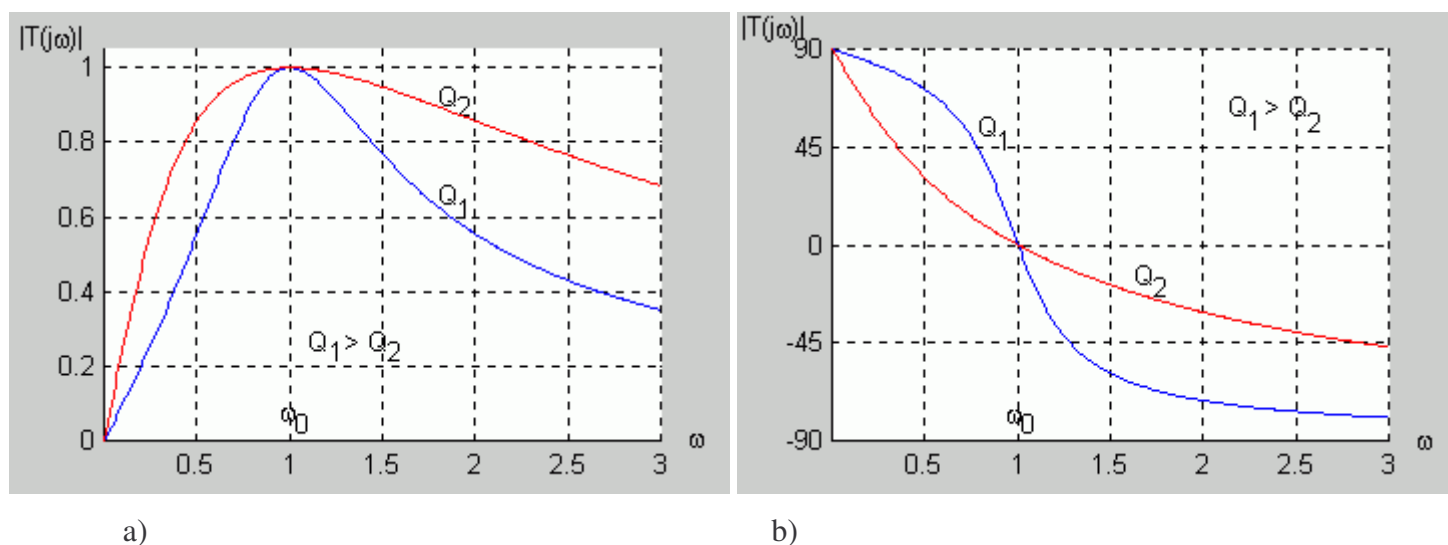
- charakterystyka amplitudowa

$$|T_{SP}(j\omega)| = \frac{A_{SP}\omega\omega_0}{Q\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}} \quad (16.25)$$

- charakterystyka fazowa

$$\varphi(j\omega) = 90^\circ - \arctg \frac{\omega\omega_0}{Q(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (16.26)$$

Na rys. 16.9a przedstawiono typowe charakterystyki amplitudowe a na rys. 16.9b charakterystyki fazowe filtra środkowoprzepustowego drugiego rzędu dla dwu różnych dobroci, przy czym $Q_1 > Q_2$



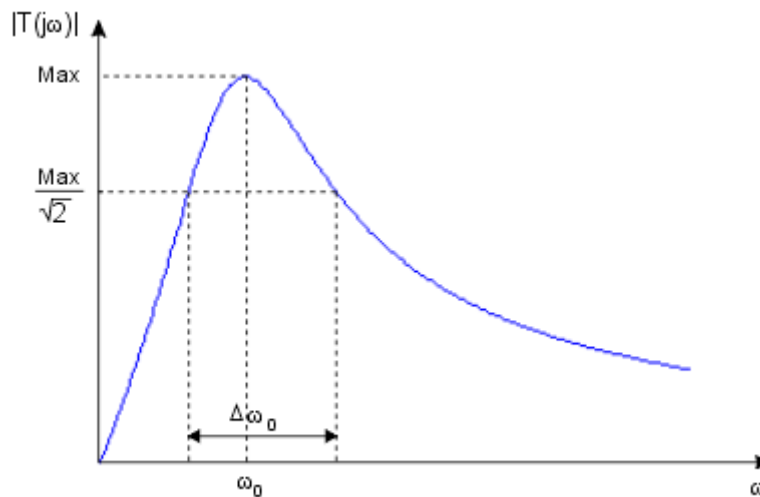
Rys. 16.9 Charakterystyki częstotliwościowe filtra środkowoprzepustowego drugiego rzędu:
a) amplitudowe, b) fazowe



Z charakterystyk częstotliwościowych widać, że pulsacja środkowa odpowiada wartości maksymalnej charakterystyki amplitudowej. Dobroć filtra określa stosunek pulsacji środkowej ω_0 do 3 decybelowego pasma przenoszenia $\Delta\omega_0$ (zakres częstotliwości którego krańce wyznaczają wartości charakterystyki amplitudowej przyjmujące $1/\sqrt{2}$ wartości maksymalnej)

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_0} \quad (16.27)$$

Interpretacja 3 decybelowego pasma przenoszenia przedstawiona jest na rys. 16.10.



Rys. 16.10 Interpretacja 3 decybelowego pasma przenoszenia

16.3.4 Charakterystyki częstotliwościowe filtra górnoprzepustowego

Po wstawieniu zależności $s = j\omega$ do wzoru na transmitancję $T_{GP}(s)$ otrzymuje się charakterystykę częstotliwościową filtra górnoprzepustowego w postaci

$$T_{GP}(j\omega) = \frac{-A_{GP}\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega\omega_0}{Q}} \quad (16.28)$$

Jest to funkcja zespolona pulsacji. Moduł tej funkcji stanowi charakterystykę amplitudową a faza – charakterystykę fazową układu. Charakterystyki te wyrażone są wzorami

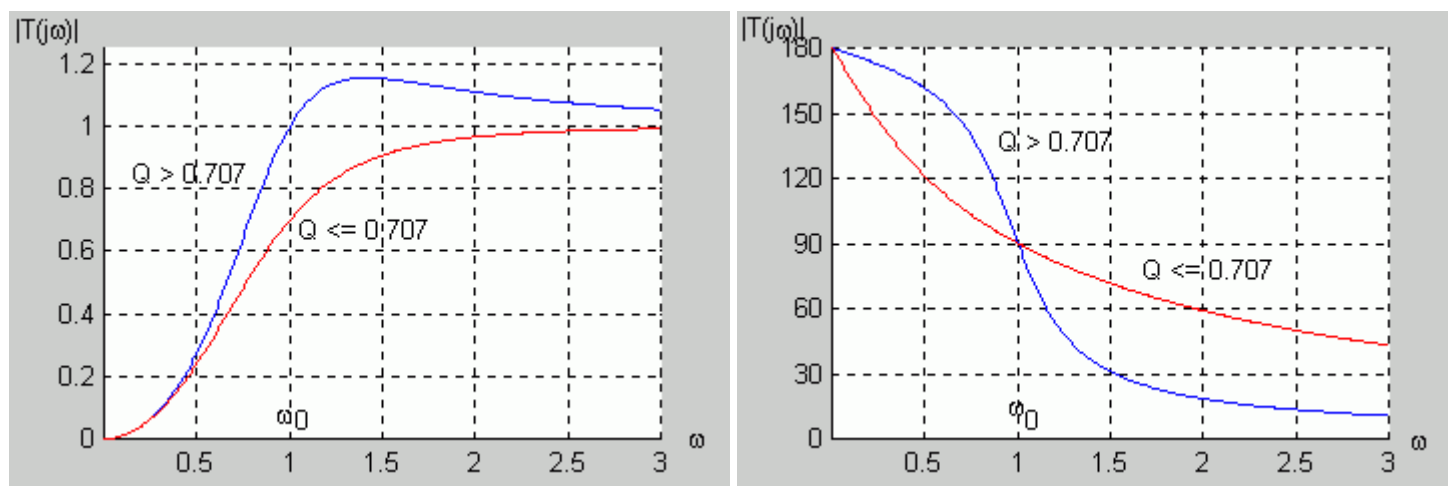
- charakterystyka amplitudowa

$$|T_{GP}(j\omega)| = \frac{A_{GP}\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}} \quad (16.29)$$

- charakterystyka fazowa

$$\varphi(j\omega) = 180^\circ - \arctg \frac{\omega\omega_0}{Q(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (16.30)$$

Na rys. 16.11a przedstawiono typowe charakterystyki amplitudowe a na rys. 16.11b charakterystyki fazowe filtra dolnoprzepustowego drugiego rzędu dla dwu różnych dobroci: $Q > 1/\sqrt{2}$ oraz $Q \leq 1/\sqrt{2}$.



a)

b)

Rys. 16.11 Charakterystyki częstotliwościowe filtra górnoprzepustowego: a) amplitudowe, b) fazowe



Dla dobroci $Q_1 > 1/\sqrt{2}$ charakterystyka amplitudowa jest niemonotoniczna i osiąga maksimum dla pulsacji

$$\omega_m = \omega_0 \frac{1}{\sqrt{1 - 1/2Q^2}} \quad (16.31)$$

Dla dobroci $Q_1 \leq 1/\sqrt{2}$ przebieg charakterystyki amplitudowej staje się monotoniczny i maksimum funkcji nie występuje. Przy $Q_1 = 1/\sqrt{2}$ charakterystyka jest maksymalnie płaska.

Pulsacja ω_m (jeśli jest określona) jest różna od pulsacji środkowej ω_0 . Jak z charakterystyk częstotliwościowych widać pulsacja środkowa odpowiada wartości przy której przesunięcie fazowe układu jest równe 90 stopni. Może być więc łatwo wyznaczona z charakterystyki fazowej. Dobroć układu można z kolei prosto wyznaczyć wykorzystując postać charakterystyki amplitudowej. Obliczając ją dla dwu wartości częstotliwości: częstotliwości maksymalnej (teoretycznie nieskończonej) i środkowej otrzymuje się

$$Q = \frac{|T_{GP}(j\omega_0)|}{|T_{GP}(\infty)|} \quad (16.32)$$

Wyznaczenie dobroci na podstawie charakterystyk częstotliwościowych polega więc na określeniu wartości charakterystyki amplitudowej dla dwu częstotliwości: maksymalnej (teoretycznie nieskończonej) i środkowej a następnie podstawieniu do powyższego wzoru.

16.4 Charakterystyki częstotliwościowe układu n -tego rzędu

Najbardziej ogólnym przypadkiem jest układ opisany transmitancją operatorową $T(s)$ n -tego rzędu o postaci ogólnej zadanej wzorem

$$T(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (16.33)$$

Załączony do podręcznika program interakcyjny CHARAKTERYSTYKI umożliwia wykreślanie charakterystyk częstotliwościowych (amplitudowych i fazowych) układów opisanych za pomocą transmitancji operatorowej o postaci określonej wzorem (16.33). Transmitancja widmowa $T(j\omega)$ takiego układu wyznaczana jest z transmitancji operatorowej $T(s)$ przez podstawienie $s=j\omega$. W wyniku otrzymuje się

$$T(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 j\omega + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 j\omega + a_0} \quad (16.34)$$

Transmitancja widmowa przedstawia sobą funkcję zespoloną pulsacji ω i może być zapisana w postaci ogólnej jako

$$T(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega) \quad (16.35)$$

Część rzeczywista $A(\omega)$ i urojona $B(\omega)$ są funkcjami zarówno współczynników a_i , b_i licznika i mianownika transmitancji operatorowej, jak i aktualnej wartości pulsacji ω . Charakterystyka amplitudowa przedstawia sobą moduł transmitancji widmowej określony wzorem

$$|T(j\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \quad (16.36)$$

Charakterystyka fazowa jest fazą transmitancji widmowej i wyznaczana jest z zależności

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{B(\omega)}{A(\omega)}\right) \quad (16.37)$$

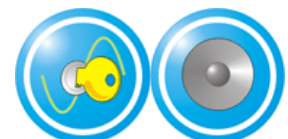
Powyższe zależności zostały wykorzystane do badania charakterystyk częstotliwościowych układów opisanych transmitancją operatorową $T(s)$ zadawaną przez użytkownika. Wejście w program CHARAKTERYSTYKI następuje przez kliknięcie w ikonę programu.

Charakterystyki częstotliwościowe

st. mian.	4	a ₀ =	0.322	b ₀ =	0.287
st. liczn.	4	a ₁ =	0.778	b ₁ =	0.0
		a ₂ =	1.487	b ₂ =	0.082
		a ₃ =	0.945	b ₃ =	0.0
		a ₄ =	1.0	b ₄ =	0.0030
w _{START}	0.0				
w _{STOP}	10.0				

Rysuj

Rys. 16.12. Okno programu CHARAKTERYSTYKI



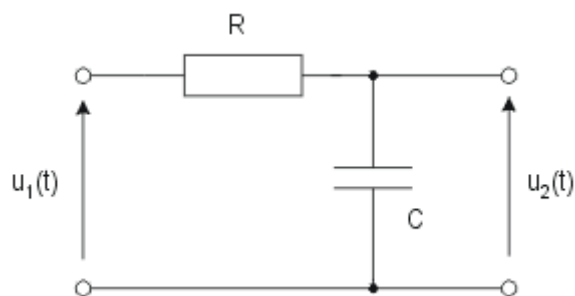
Użytkownik zadaje stopień licznika i mianownika transmitancji, a także wartości wszystkich współczynników wielomianu licznika i mianownika. Określa również zakres pulsacji, dla którego wykreślane będą charakterystyki częstotliwościowe. W programie założono, że maksymalny rząd układu nie powinien przekroczyć wartości 9.

Wykorzystując podane wcześniej zależności częstotliwościowe program wykreśla charakterystyki amplitudowe (liniową i logarytmiczną wyrażoną w decybelach) oraz charakterystykę fazową w stopniach. Charakterystyki filtru zostają wykreślone w oddzielnych oknach, pozwalających na skalowanie oraz oglądanie w powiększeniu poszczególnych odcinków krzywych.

Zadania sprawdzające

Zadanie 16.1

Wyznaczyć charakterystyki częstotliwościowe obwodu przedstawionego na rys. 16.13 biorąc pod uwagę transmitancję napięciową.



Rys. 16.13. Schemat obwodu do zadania 16.1

Rozwiązanie

Transmitancja napięciowa obwodu określona jest wzorem

$$T_u(s) = \frac{1/sC}{R + 1/sC} = \frac{1}{sRC + 1}$$

Transmitancja widmowa obwodu określona jest na podstawie transmitancji operatorowej $T_u(s)$ przy założeniu $s = j\omega$

$$T_u(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1}$$

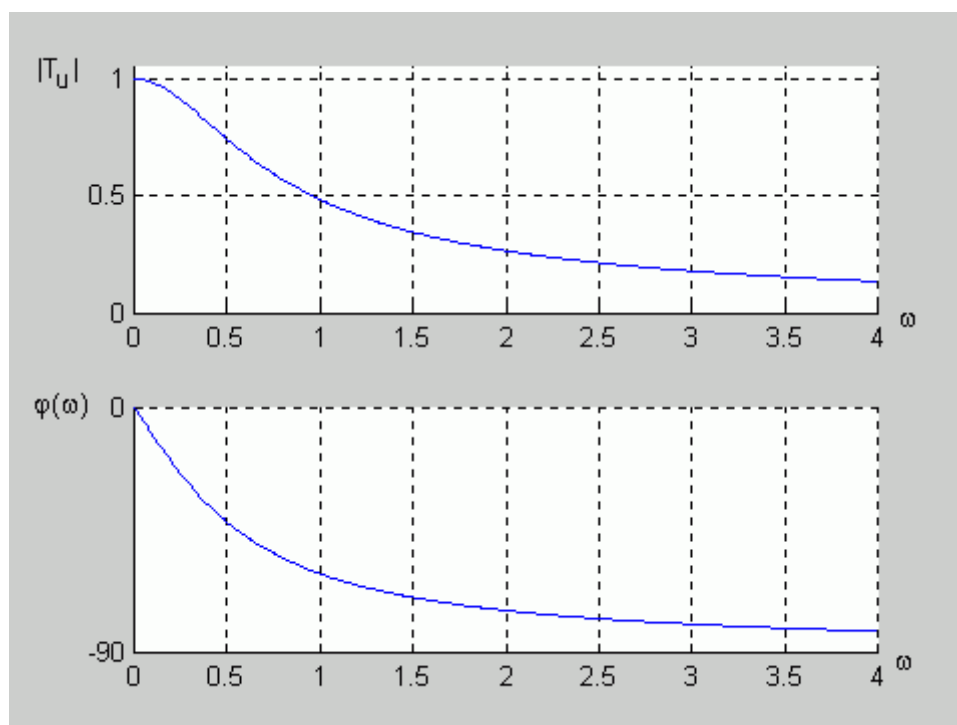
Charakterystyka amplitudowa

$$|T_u(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$$

Charakterystyka fazowa

$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega RC)$$

Na rys. 16.14 przedstawiono charakterystykę amplitudową i fazową dla wartości jednostkowych elementów obwodu ($R = 1 \Omega$ i $C = 1F$)



Rys. 16.14 Charakterystyki częstotliwościowe obwodu z rys. 16.12:

a) charakterystyka amplitudowa, b) charakterystyka fazowa



Zadanie 16.2

Wykreślić charakterystyki częstotliwościowe członu inercyjnego pierwszego rzędu opisanego wzorem

$$T(s) = \frac{s+1}{s+2}$$

Rozwiązanie

Przy założeniu $s = j\omega$ otrzymuje się charakterystykę widmową postaci

$$T(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{j\omega + 2}$$

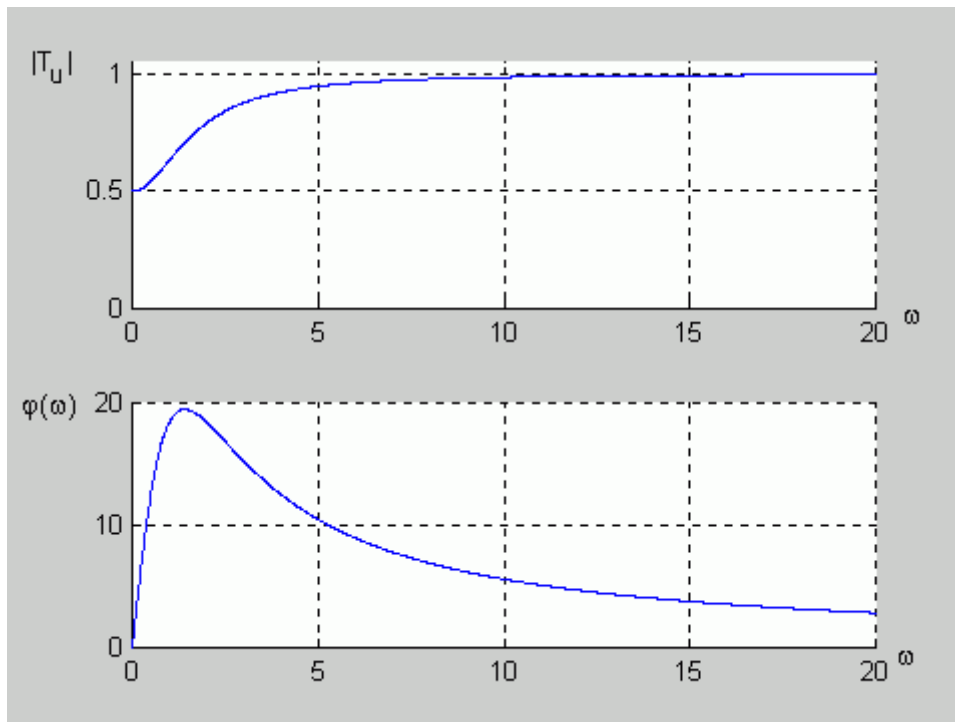
Charakterystyka amplitudowa

$$|T(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\sqrt{\omega^2 + 4}}$$

Charakterystyka fazowa

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \omega - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{2}$$

Na rys. 16.15 przedstawiono wykresy charakterystyki amplitudowej (rys. 16.15a) i fazowej (rys. 16.15b).



Rys. 16.15 Wykresy charakterystyki amplitudowej (a) i fazowej (b) członu inercyjnego z zadania 16.2



Zadanie 16.3

Napisać wyrażenie na transmitancję filtra bikwadratowego dolno-, środkowo- i górnoprzepustowego o następujących parametrach: $\omega_0 = 1$, $Q = 2$ przy jednostkowych wzmocnieniach w pasmach przepustowych.

Rozwiązanie

Korzystając z podstawowych wzorów na transmitancje bikwadratowe otrzymuje się

- Filtr dolnoprzepustowy

$$T_{DP}(s) = \frac{1}{s^2 + 0,5s + 1}$$

- Filtr środkowoprzepustowy

$$T_{DP}(s) = \frac{0,5s}{s^2 + 0,5s + 1}$$

- Filtr górnoprzepustowy

$$T_{DP}(s) = \frac{s^2}{s^2 + 0,5s + 1}$$

Lekcja 17. Czwórniki

Wstęp

W opisie obwodów elektrycznych bardzo często interesują nas jedynie odpowiedzi dotyczące jednej gałęzi obwodu w zależności od sygnału wymuszającego przyłożonego na wejściu obwodu. W takim przypadku wygodnie jest sprowadzić opis obwodu do zależności występujących między prądami i napięciami na zaciskach uważanych za wejście i wyjście, wprowadzając pojęcie czwórnika.

Lekcja siedemnasta poświęcona jest podstawowym informacjom o czwórnikach. Zostaną podane definicje oraz podstawowe opisy macierzowe czwórników: impedancyjny, admitancyjny, hybrydowy oraz łańcuchowy. Rozpatrzone zostaną różne połączenia czwórnikowe oraz opisy macierzowe takich układów. Pokazany zostanie związek transmitancji operatorowej z opisem macierzowym czwórnika.



17.1 Definicja czwórnika

Czwórnik jest elementem czterozaciskowym, mającym dwie pary uporządkowanych zacisków, z których jedna para jest wejściem a druga para wyjściem. Oznaczenie czwórnika z zaznaczonymi zwrotami prądów i napięć końcówkowych jest przedstawione na rys. 17.1.



Rys. 17.1. Oznaczenie czwórnika z zaznaczonymi zwrotami prądów i napięć

W odniesieniu do wejścia i wyjścia czwórnika musi być spełniony warunek równości prądów:

$$I_1 = I_1' \quad (17.1)$$

$$I_2 = I_2' \quad (17.2)$$

jak to zaznaczono na rysunku. Sygnały prądu i napięcia po stronie wejściowej oznaczać będziemy ze wskaźnikiem 1, a po stronie wyjściowej – ze wskaźnikiem 2. Przyjmiemy umownie, że oba prądy: na wejściu i wyjściu są zwrócone do prostokąta oznaczającego czwórnik.

W zależności od elementów tworzących obwód, czwórnik może być liniowy (gdy wszystkie elementy obwodu są liniowe) lub nieliniowy. W dalszych rozważaniach ograniczymy się wyłącznie do czwórników liniowych. Czwórnik nazywać będziemy pasywnym, jeśli nie wytwarza energii a jedynie pobiera ją ze źródła zasilającego i przetwarza w określony sposób. Czwórnik złożony z samych elementów pasywnych R, L, C i M jest zawsze czwórnikiem pasywnym. Czwórnik pasywny jest zdolny do gromadzenia i rozpraszania energii pobranej ze źródła, może ją również oddawać na zewnątrz, jednak w dowolnej chwili czasowej t energia ta nie może przewyższać energii pobranej. Czwórnik, który nie spełnia powyższych warunków jest czwórnikiem aktywnym (generatorem energii).

17.2 Równania czwórnika

Czwórnik może być scharakteryzowany za pomocą dwóch równań liniowych wiążących ze sobą dwa wielkości prądowe i dwie napięciowe dotyczące bramy wejściowej i wyjściowej: I_1 , I_2 , U_1 oraz U_2 . W zależności od wyboru zmiennych można wyróżnić 6 podstawowych postaci równań czwórnika. Są to

- postać admitancyjna, w której prądy wejściowy i wyjściowy (I_1 , I_2) są wyrażone w zależności od napięć zewnętrznych (U_1 , U_2)
- postać impedancyjna, w której napięcia wejściowe i wyjściowe (U_1 , U_2) są wyrażone w zależności od prądów końcówkowych (I_1 , I_2)
- postać hybrydowa w której para wielkości (U_1 , I_2) jest wyrażona jako funkcja drugiej pary (I_1 , U_2)
- postać hybrydowa odwrotna w której para wielkości (I_1 , U_2) jest wyrażona jako funkcja drugiej pary (U_1 , I_2)
- postać łańcuchowa w której para wielkości (U_1 , I_1) dotycząca zacisków wejściowych jest wyrażona jako funkcja drugiej pary (U_2 , I_2) związanej z zaciskami wyjściowymi

- postać łańcuchowa odwrotna w której para wielkości (U_2, I_2) dotycząca zacisków wyjściowych jest wyrażona jako funkcja drugiej pary (U_1, I_1) związanej z zaciskami wejściowymi.

17.2.1 Równanie admitancyjne

Jeżeli za zmienne niezależne przyjmie się napięcia obu bram U_1 oraz U_2 czwórnik przyjmie opis admitancyjny, który można wyrazić w postaci

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Y} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (17.3)$$

Macierz $\mathbf{Y}$ jest nazywana macierzą admitancyjną a parametry tej macierzy mają interpretację admitancji operatorowych.

17.2.2 Równanie impedancyjne

Jeżeli za zmienne niezależne przyjmie się prądy obu bram I_1 oraz I_2 , czwórnik przyjmie opis impedancyjny, który można wyrazić w postaci

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Z} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (17.4)$$

Macierz $\mathbf{Z}$ jest nazywana macierzą impedancyjną a parametry tej macierzy mają interpretację impedancji operatorowych. Łatwo jest udowodnić, że macierze impedancyjna i admitancyjna są powiązane relacją

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1} \quad (17.5)$$

17.2.3 Równanie hybrydowe

Przy opisie hybrydowym za zmienne niezależne wybiera się prąd wejściowy i napięcie wyjściowe czwornika. Równanie hybrydowe przyjmuje się w postaci

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (17.6)$$

w której **H** jest **macierzą hybrydową**. Jak widać z opisu hybrydowego parametr H_{11} ma interpretację impedancji a H_{22} admitancji. Parametry H_{12} i H_{21} są bezwymiarowe i wyrażają stosunek odpowiednio dwu napięć i dwu prądów w obwodzie.

17.2.3 Równanie hybrydowe odwrotne

Opis hybrydowy odwrotny czwórnika definiuje się w postaci

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (17.7)$$

Stanowi on odwrotność opisu hybrydowego macierzą **H**. Obie macierze powiązane są następującą relacją $\mathbf{G} = \mathbf{H}^{-1}$.

17.2.4 Równanie łańcuchowe

Równanie łańcuchowe czwórnika uzależnia prąd i napięcie na wejściu czwórnika od prądu i napięcia na jego wyjściu

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (17.8)$$

W równaniu tym, inaczej niż w pozostałych opisach, przyjmuje się prąd I_2 wypływający z czwórnika, w związku z czym przy założonym na wstępie zwrocie prądu do czwórnika w opisie pojawia się prąd wyjściowy ze znakiem minus. Elementy **macierzy łańcuchowej A** nazywane są parametrami łańcuchowymi czwórnika.

17.2.5 Równanie łańcuchowe odwrotne

Równanie łańcuchowe odwrotne czwórnika uzależnia prąd i napięcie na wyjściu czwórnika od prądu i napięcia na jego wejściu

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} \quad (17.9)$$

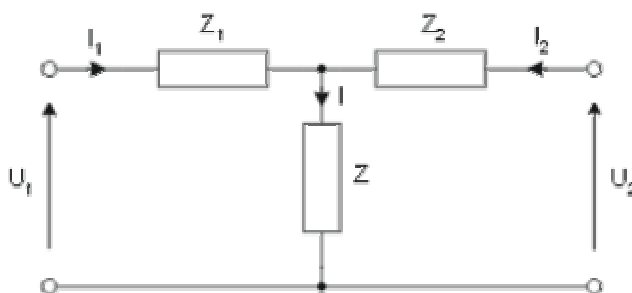
Ostatni rodzaj opisu czwórnikowego (równanie łańcuchowe odwrotne) jest rzadko stosowany. Macierz **B** występująca w tym opisie nazywana jest macierzą łańcuchową odwrotną.

Każdy z przedstawionych typów macierzy jednoznacznie opisuje czwórnik. Wybór któregoś z nich jest uwarunkowany strukturą obwodu, sposobem połączenia czwórników, łatwością wyznaczenia parametrów, itp. Przejście z jednego opisu do drugiego polega na przegrupowaniu zmiennych i wyznaczeniu odpowiednich relacji między tymi zmiennymi.

Duża liczba stosowanych opisów macierzowych czwórnika wynika również z faktu, że dla niektórych czwórników pewne opisy mogą nie istnieć. Najbardziej uniwersalne pod tym względem są opisy hybrydowe wykorzystujące macierz **H** lub **G**, które można otrzymać dla większości obwodów elektrycznych.

Przykład 17.1

Wyznaczyć opis czwórnika przedstawionego na rys. 17.2. Czwórnik ten nosi nazwę czwórnika typu T i jest jedną z najpopularniejszych struktur czwórnikowych.



Rys. 17.2. Schemat obwodu do przykładu 17.1

Rozwiązanie

Z prawa napięciowego i prądowego Kirchhoffa zastosowanego do obwodu z rys. 17.2 można napisać następujące równania

$$I_1 = I - I_2 = YU_2 + (1 + Z_2Y)(-I_2)$$

$$U_1 = U_2 + Z_1I_1 - Z_2I_2$$

Po podstawieniu równania pierwszego do drugiego otrzymuje się

$$U_1 = (1 + Z_1 Y)U_2 + (Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y)(-I_2)$$

Jeśli jako opis macierzowy przyjmiemy równanie łańcuchowe to zależności określające prąd wejściowy i napięcie wejściowe w funkcji prądu i napięcia wyjściowego można zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + Z_1 Y & Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y \\ Y & 1 + Z_2 Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Macierz łańcuchowa $\mathbf{A}$ dana jest więc wzorem

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 + Z_1 Y & Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y \\ Y & 1 + Z_2 Y \end{bmatrix}$$

Jeśli jako opis macierzowy przyjmiemy równanie impedancyjne, wówczas z przetworzenia równania łańcuchowego otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z + Z_1 & Z \\ Z & Z + Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Macierz impedancyjna dana jest więc w postaci

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z + Z_1 & Z \\ Z & Z + Z_2 \end{bmatrix}$$

Jest to macierz symetryczna, która jest równa macierzy oczkowej obwodu tworzącego analizowany czwórnik.

17.3 Związek transmitancji operatorowych z opisem czwórnikowym

Opis macierzowy czwórników jest najbardziej uniwersalnym opisem układu czterokońcówkowego, obejmującym wszystkie cztery wielkości zewnętrzne: prądy i napięcia obu bram. Jest zatem idealny do wyznaczenia dowolnej transmitancji układu, gdyż z jednego

równania czwórnikowego wynikają wszystkie możliwe związki między wielkościami bramowymi. W lekcji tej tym pokażemy związek opisu transmitancyjnego z parametrami macierzowymi czwórnika.

17.3.1 Transmitancja napięciowa

Weźmy pod uwagę transmitancję napięciową, jako stosunek napięcia wyjściowego do napięcia wejściowego w dziedzinie operatorowej przy założeniu zerowego prądu obciążenia czwórnika ($I_2(s) = 0$)

$$T_u(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \quad (17.10)$$

Z równania łańcuchowego, wobec $I_2(s) = 0$ otrzymujemy

$$U_1(s) = A_{11}U_2(s) \quad (17.11)$$

Stąd

$$T_u(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{A_{11}} \quad (17.12)$$

O transmitancji napięciowej decyduje jeden parametr łańcuchowy A_{11} czwórnika. W identyczny sposób uzyskać można relację wiążącą transmitancję napięciową z parametrami dowolnego opisu czwórnikowego. Przykładowo na podstawie opisu admitancyjnego z równania drugiego czwórnika, wobec $I_2 = 0$, wynika

$$I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 = 0 \quad (17.13)$$

Stąd

$$T_u(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}} \quad (17.14)$$

17.3.2 Impedancja wejściowa

Określenie funkcji impedancji wejściowej układu czwórnika wymaga ustalenia przy jakiej impedancji obciążenia badany jest czwórnik. Załóżmy w ogólności obciążenie czwórnika impedancją Z_o . Z równań łańcuchowych czwórnika otrzymuje się

$$\begin{aligned}U_1(s) &= A_{11}U_2(s) + A_{12}(-I_2(s)) = A_{11}U_2(s) + A_{12}Y_oU_2(s) \\I_1(s) &= A_{21}U_2(s) + A_{22}(-I_2(s)) = A_{21}U_2(s) + A_{22}Y_oU_2(s)\end{aligned}\quad (17.15)$$

gdzie Y_o oznacza admitancję obciążenia (odwrotność impedancji Z_o , $Y_o=1/Z_o$). Z powyższych równań otrzymuje się

$$Z_{we}(s) = \frac{U_1(s)}{I_1(s)} = \frac{A_{11} + A_{12}Y_o}{A_{21} + A_{22}Y_o} \quad (17.16)$$

Impedancja wejściowa czwórnika obciążonego jest funkcją wszystkich parametrów łańcuchowych tego czwórnika. Pewne uproszczenia powstają w stanach szczególnych obciążeń. Na przykład w stanie jałowym na zaciskach wyjściowych ($Y_o=0$)

$$Z_{we}(s) = \frac{A_{11}}{A_{21}} \quad (17.17)$$

oraz w stanie zwarcia na wyjściu ($Y_o = \infty$)

$$Z_{we}(s) = \frac{A_{12}}{A_{22}} \quad (17.18)$$

impedancja wejściowa zależy wyłącznie od dwóch parametrów łańcuchowych. Identyczne zależności określające impedancje wejściową otrzymać można na podstawie dowolnego opisu czwórnikowego.

Przykład 17.2

Wyznaczyć wyrażenie na transmitancję napięciową i impedancję wejściową czwórnika z przykładu 17.1

Rozwiązanie

Macierz łańcuchowa czwórnika z przykładu 17.1 ma postać

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 + Z_1 Y & Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y \\ Y & 1 + Z_2 Y \end{bmatrix}$$

Transmitancja napięciowa w stanie jałowym na wyjściu jest więc równa

$$T_u(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{A_{11}} = \frac{1}{1 + Z_1 Y} = \frac{Z}{Z + Z_1}$$

Wobec braku obciążenia czwórnika przez impedancję Z_2 nie przepływa prąd, stąd całe napięcie wyjściowe pochodzi z impedancji poprzecznej Z (dzielnik impedancyjny).

Impedancja wejściowa czwórnika przy obciążeniu bramy wyjściowej impedancją Z_o na podstawie wzoru (17.16) jest równa

$$Z_{we}(s) = \frac{U_1(s)}{I_1(s)} = \frac{A_{11} + A_{12}Y_o}{A_{21} + A_{22}Y_o} = \frac{(1 + Z_1 Y) + (Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y)Y_o}{Y + (1 + Z_2 Y)Y_o}$$

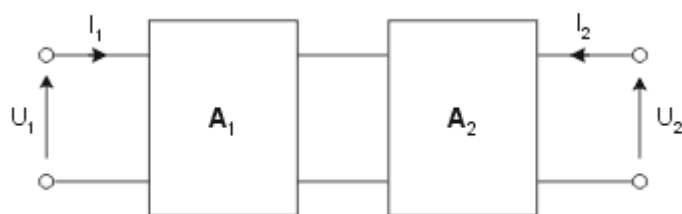
Jest ona funkcją wszystkich parametrów układu oraz impedancji obciążenia.

17.4 Połączenia czwórników

Mnogość opisów czwórnikowych wynika z różnorodności połączeń, jakie są możliwe przy założeniu dostępności obu bram: wejściowej i wyjściowej. Rozważymy tu podstawowe połączenie czwórników między sobą: połączenie łańcuchowe, szeregowo, równoległe oraz szeregowo-równoległe i równoległe-szeregowe.

17.4.1 Połączenie łańcuchowe

Połączenie łańcuchowe, zwane również kaskadowym czwórników to takie połączenie, w którym zaciski wejściowe jednego czwórnika są przyłączone do zacisków wyjściowych poprzedniego. Przykład połączenia łańcuchowego dwu czwórników przedstawiony jest na rys. 17.3.



Rys. 17.3. Połączenie łańcuchowe czwórników

Łatwo jest pokazać, że macierz łańcuchowa $\mathbf{A}$ czwórników połączonych kaskadowo jest równa iloczynowi macierzy łańcuchowych poszczególnych czwórników tworzących to połączenie

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \quad (17.19)$$

Przy większej liczbie czwórników połączonych kaskadowo macierz łańcuchowa wypadkowa jest równa iloczynowi macierzy łańcuchowych wszystkich czwórników branych w kolejności ich występowania w łańcuchu.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_n \quad (17.20)$$

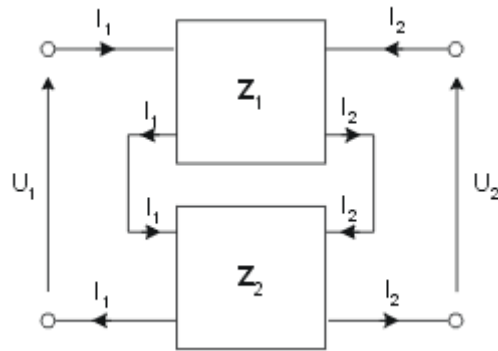
Należy zwrócić uwagę, że przy mnożeniu macierzy istotna jest kolejność tych macierzy, gdyż w ogólności $\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \neq \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1$.

17.4.2 Połączenie szeregowe czwórników

Dwa czwórniki są połączone szeregowo, jeśli spełnione są warunki:

- prąd wejściowy jednego czwórnika jest równy prądowi wejściowemu drugiego a prąd wyjściowy jednego czwórnika jest równy prądowi wyjściowemu drugiego
- napięcie wejściowe (wyjściowe) połączenia jest równe sumie napięć wejściowych (wyjściowych) każdego czwórnika.

Na rys. 17.4 przedstawiono układ dwu **czwórników połączonych szeregowo**, spełniający powyższe warunki.



Rys. 17.4. Połączenie szeregowe czwórników

Łatwo jest pokazać, że w połączeniu szeregowym czwórników macierz impedancyjna $\mathbf{Z}$ połączenia jest równa sumie macierzy impedancyjnych każdego czwornika. Oznacza to, że

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 \quad (17.21)$$

Przy większej liczbie czwórników połączonych szeregowo macierz impedancyjna wypadkowa jest równa sumie macierzy impedancyjnych wszystkich czwórników występujących w połączeniu.

$$\mathbf{Z} = \sum_{i=1}^n \mathbf{Z}_i \quad (17.22)$$

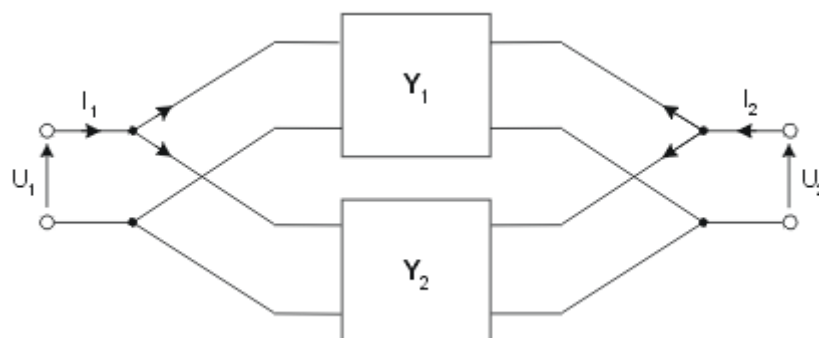
Kolejność sumowania macierzy impedancyjnych nie odgrywa żadnej roli.

17.4.3 Połączenie równoległe czwórników

Dwa **czwórniki są połączone równoległe**, jeśli spełnione są warunki:

- napięcie wejściowe każdego czwornika jest takie samo, podobnie napięcie wyjściowe
- prąd wejściowy (wyjściowy) połączenia jest równy sumie prądów wejściowych (wyjściowych) każdego czwornika.

Na rys. 17.5 przedstawiono układ dwu czwórników połączonych równoległe, spełniający powyższe warunki.



Rys. 17.5. Połączenie równoległe czwórników

Łatwo jest pokazać, że w połączeniu równoległym czwórników macierz admitancyjna $\mathbf{Y}$ połączenia jest równa sumie macierzy admitancyjnych każdego czwórnika. Oznacza to, że

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 \quad (17.23)$$

Przy większej liczbie czwórników połączonych równoległe macierz admitancyjna wypadkowa jest równa sumie macierzy admitancyjnych wszystkich czwórników występujących w połączeniu.

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^n \mathbf{Y}_i \quad (17.24)$$

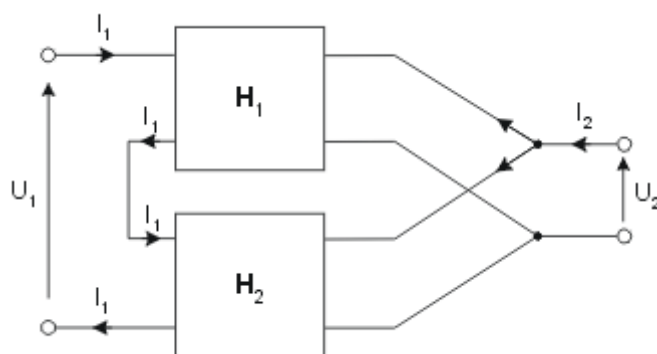
Kolejność sumowania macierzy admitancyjnych nie odgrywa żadnej roli.

17.4.4 Połączenie szeregowe-równoległe czwórników

Dwa **czwórniki** są **połączone szeregowo-równoległe**, jeśli spełnione są warunki:

- prąd wejściowy każdego czwórnika jest taki sam a napięcie wejściowe połączenia jest równe sumie napięć wejściowych każdego czwórnika
- prąd wyjściowy połączenia jest równy sumie prądów wyjściowych każdego czwórnika a napięcie wyjściowe obu czwórników jest takie samo.

Na rys. 17.6 przedstawiono układ dwu czwórników połączonych szeregowo-równoległe (szeregowo po stronie zacisków wejściowych i równoległe po stronie zacisków wyjściowych), spełniający powyższe warunki.



Rys. 17.6. Połączenie szeregowo-równoległe czwórników

Łatwo jest pokazać, że w połączeniu szeregowo-równoległym czwórników macierz hybrydowa $\mathbf{H}$ połączenia jest równa sumie macierzy hybrydowych $\mathbf{H}$ każdego czwórnika. Oznacza to, że

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 \quad (17.25)$$

Przy większej liczbie czwórników połączonych szeregowo-równoległe macierz hybrydowa $\mathbf{H}$, wypadkowa dla całego połączenia jest równa sumie macierzy hybrydowych $\mathbf{H}$ wszystkich czwórników występujących w połączeniu.

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i \quad (17.26)$$

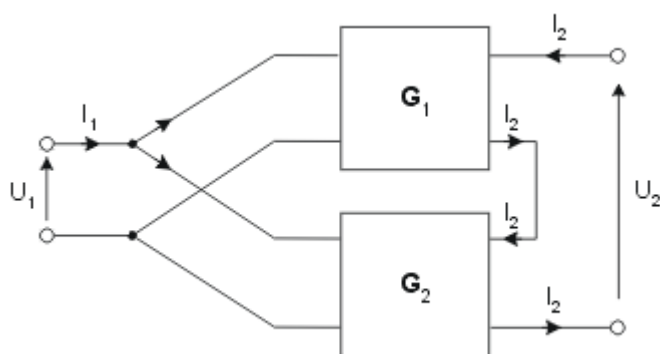
Kolejność sumowania macierzy hybrydowych nie odgrywa żadnej roli.

17.4.5 Połączenie równoległo-szeregowe czwórników

Dwa **czwórniki** są **połączone równoległo-szeregowo**, jeśli spełnione są warunki:

- napięcie wejściowe każdego czwórnika jest takie samo a prąd wejściowy połączenia jest równy sumie prądów wejściowych każdego czwórnika
- prąd wyjściowy każdego czwórnika jest taki sam a napięcie wyjściowe połączenia jest równe sumie napięć wyjściowych każdego z nich.

Na rys. 17.7 przedstawiono układ dwu czwórników połączonych równoległo-szeregowo (równoległe po stronie zacisków wejściowych i szeregowo po stronie zacisków wyjściowych), spełniający powyższe warunki.



Rys. 17.7. Połączenie równoległo-szeregowe czwórników

Łatwo jest pokazać, że w połączeniu równoległo-szeregowym czwórników macierz hybrydowa odwrotna $\mathbf{G}$ połączenia jest równa sumie macierzy hybrydowych $\mathbf{G}$ każdego czwórnika. Oznacza to, że

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 \quad (17.27)$$

Przy większej liczbie czwórników połączonych równoległo-szeregowo macierz hybrydowa odwrotna $\mathbf{G}$, wypadkowa dla całego połączenia jest równa sumie macierzy hybrydowych $\mathbf{G}$ wszystkich czwórników występujących w połączeniu.

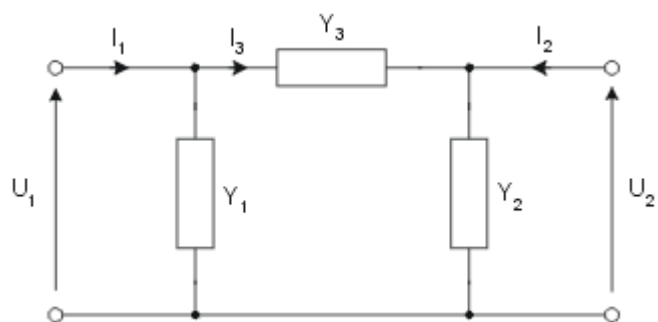
$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^n \mathbf{G}_i \quad (17.28)$$

Kolejność sumowania macierzy nie odgrywa żadnej roli.

Zadania sprawdzające

Zadanie 17.1

Wyznaczyć macierzowy opis czwórnikowy czwórnika typu Π o strukturze podanej na rys. 17.8.



Rys. 17.8. Struktura i oznaczenia admitancji w czwórniku typu Π

Rozwiązanie

Układ równań Kirchhoffa opisujących obwód

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_1 U_1 + I_3 \\ I_2 &= Y_2 U_2 - I_3 \\ I_3 &= Y_3 (U_1 - U_2) \end{aligned}$$

Równania czwórnikowe

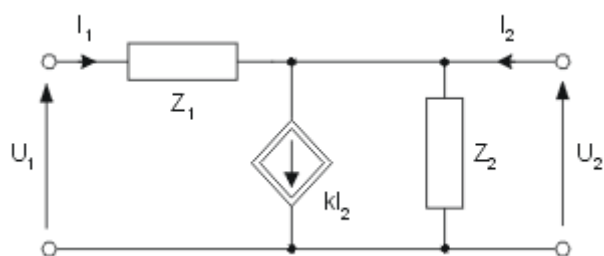
$$\begin{aligned} I_1 &= (Y_1 + Y_3) U_1 - Y_3 U_2 \\ I_2 &= -Y_3 U_1 + (Y_2 + Y_3) U_2 \end{aligned}$$

Macierz admitancyjna

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_3 & -Y_3 \\ -Y_3 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix}$$

Zadanie 17.2

Wyznaczyć macierz łańcuchową czwórnika odpowiadającego obwodowi z rys. 17.9. Określić na tej podstawie transmitancję napięciową układu.



Rys. 17.9. Schemat obwodu do zadania 17.2

Rozwiązanie

Z równań Kirchhoffa dla obwodu z rys. 17.9 otrzymuje się

$$U_1 = Z_1 I_1 + U_2 = Z_1 \left(k I_2 - I_2 + \frac{U_2}{Z_2} \right) + U_2$$

$$I_1 = k I_2 - I_2 + \frac{U_2}{Z_2}$$

Opis łańcuchowy czwórnik

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_1 - k Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 - k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Transmitancja napięciowa określana przy założeniu $I_2 = 0$ jest równa

$$T_u(s) = \frac{1}{A_{11}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Zadanie 17.3

Wyznaczyć transmitancję napięciową czwórnik na podstawie znanej macierzy impedancyjnej $\mathbf{Z}$.

Rozwiązanie

Transmitancja napięciowa z założenia określona jest przy warunku $I_2 = 0$. Z opisu impedancyjnego czwórnika

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Z} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

wobec $I_2 = 0$ otrzymujemy

$$U_1 = Z_{11}I_1$$

$$U_2 = Z_{21}I_1$$

Stąd

$$T_u(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}}$$

Lekcja 18. Wybrane zastosowania czwórników

Wstęp

Istnieje ogromna różnorodność czwórników ważnych z punktu widzenia zastosowań praktycznych. Tutaj ograniczymy się do trzech, najbardziej reprezentatywnych z punktu widzenia zastosowań inżynierskich: żyratora, konwertera ujemno-impedancyjnego oraz idealnego wzmacniacza napięciowego.

Pokażemy analizę wybranych zastosowań tych czwórników. Udowodnimy uniwersalność wzmacniacza operacyjnego, pozwalającego zrealizować wiele typów układów, w tym układ sumatora wielowejściowego, układ całkujący, układ różniczkujący, przesuwnik fazowy, żyrator i konwerter ujemno-impedancyjny.

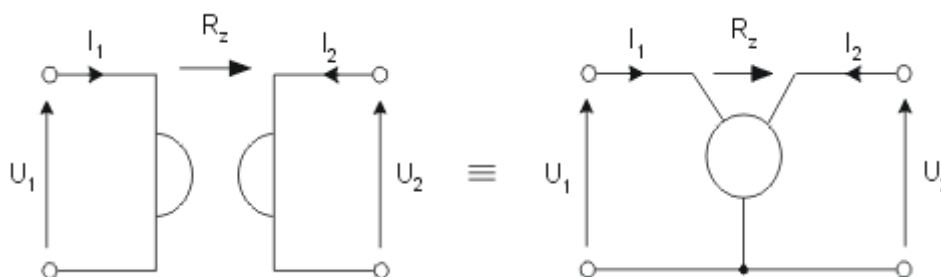


18.1 Żyrator

Żyrator jest czwórnikiem opisanym następującą macierzą łańcuchową

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R_z \\ G_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (18.1)$$

Parametr G_z jest nazywany konduktancją żyracji a $R_z = 1/G_z$ rezystancją. Oznaczenia graficzne żyratora przedstawione są na rys. 18.1.

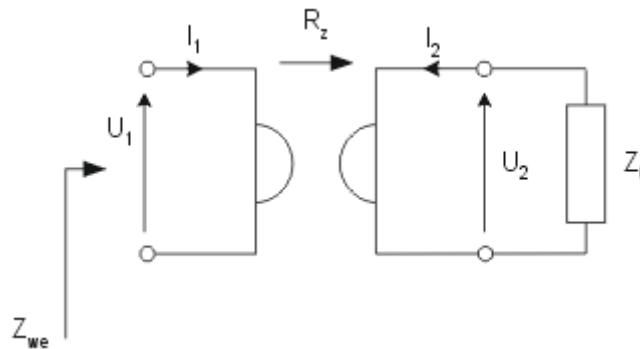


Rys. 18.1. Oznaczenia graficzne żyratora

Znak minus występujący przy prądzie wyjściowym wynika z przyjętego zwrotu prądu wyjściowego (do pudełka). Równaniu łańcuchowemu zyratora odpowiada opis admitancyjny o postaci

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G_z \\ -G_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (18.2)$$

Najważniejszą własnością zyratora jest przetwarzanie impedancji obciążenia w impedancję odwrotnie proporcjonalną do niej. Rozważmy układ zyratora obciążonego impedancją Z_o (rys. 18.2).



Rys. 18.2. Układ zyratora obciążonego impedancją

Impedancja wejściowa takiego układu zdefiniowana w postaci

$$Z_{we} = \frac{U_1}{I_1} \quad (18.3)$$

po uwzględnieniu wzoru (17.16) wobec $A_{11} = 0$, $A_{12} = R_z$, $A_{21} = G_z$, $A_{22} = 0$ jest równa

$$Z_{we} = \frac{A_{11} + A_{12}Y_o}{A_{21} + A_{22}Y_o} = \frac{R_z^2}{Z_o} \quad (18.4)$$

Impedancja układu zyratora obciążonego impedancją Z_o jest odwrotnie proporcjonalna do impedancji obciążenia ze współczynnikiem proporcjonalności równym R_z^2 . Jeśli zyrator zostanie obciążony kondensatorem o impedancji operatorowej równej $Z_o = 1/sC$ (rys. 18.2)

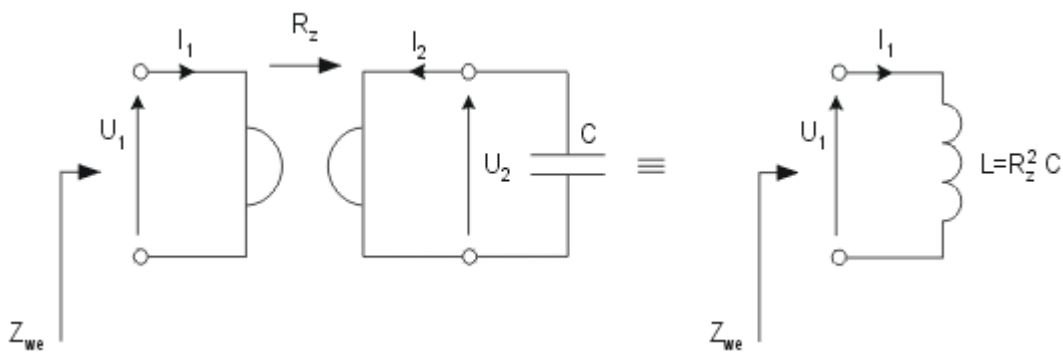
to impedancja wejściowa układu jest równa

$$Z_{we} = sR_z^2 C \quad (18.5)$$

Jest to postać odpowiadająca ogólnemu opisowi impedancji operatorowej cewki $Z_L = sL$.
Zatem układ żyratora obciążonego pojemnością C przedstawia sobą cewkę o indukcyjności L

$$L = R_z^2 C \quad (18.6)$$

Powyższej zależności matematycznej można przyporządkować transformację układową zilustrowaną na rys. 18.3.



Rys. 18.3. Realizacja indukcyjności przy pomocy żyratora



Żyrator jako czwórnik jest bardzo łatwo realizowalny w praktyce przy wykorzystaniu układów tranzystorowych lub wzmacniaczy operacyjnych. Z tego względu układy wykorzystujące żyratory są powszechnie stosowane w układach elektronicznych (np. filtrach) eliminując z nich cewki, trudno realizowalne w technologii scalonej.

18.2 Konwerter ujemno-impedancyjny (NIC)

Konwerter ujemno-impedancyjny (NIC) jest czwornikiem aktywnym (wytwarzającym energię) posiadającym własność przetwarzania prądu bądź napięcia z ujemnym znakiem. Wyróżnia się dwa rodzaje konwerterów ujemno-impedancyjnych

- NIC z inwersją prądu (INIC)

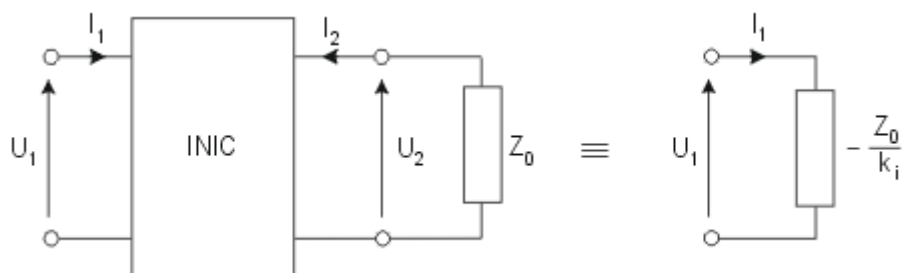
$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -K_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (18.7)$$

- NIC z inwersją napięcia (VNIC)

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_u & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (18.8)$$

Parametr K (K_i dla konwertera ujemno-impedancyjnego prądu oraz K_u dla konwertera ujemno-impedancyjnego napięcia) jest współczynnikiem przetwarzania bądź prądu bądź napięcia. W konwerterze INIC prąd wejściowy jest proporcjonalny do prądu wyjściowego z ujemnym współczynnikiem proporcjonalności $-K_i$ przy niezmienionej wartości napięcia wejściowego. W konwerterze VNIC napięcie wejściowe jest proporcjonalne do napięcia wyjściowego z ujemnym współczynnikiem proporcjonalności $-K_u$ przy niezmienionym prądzie wejściowym.

Konwerter impedancyjny przetwarza impedancję obciążenia w impedancję wejściową z ujemnym znakiem. Rozważmy układ konwertera INIC obciążonego impedancją Z_o , przedstawiony na rys. 18.4



Rys. 18.4. Układ konwertera ujemno-impedancyjnego obciążonego impedancją



Wykorzystując równania konwertera i uwzględniając równanie opisujące obciążenie $U_o = Z_o(-I_2) = U_2$ impedancja wejściowa układu dana jest zależnością

$$Z_{we} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{-K_i(-I_2)} = -\frac{Z_o}{K_i} \quad (18.9)$$

Jak z powyższego równania wynika konwerter ujemno-impedancyjny obciążony impedancją Z_o reprezentuje sobą (z punktu widzenia wejścia) impedancję ujemną $-Z_o / K_i$. Podobną własność ma konwerter ujemno-impedancyjny napięcia (VNIC).

Cecha ta może być wykorzystana do realizacji rezystancji ujemnej. Mianowicie przyjmując obciążenie konwertera rezystancją $Z_o = R_o$ otrzymuje się impedancję wejściową równą $Z_{we} = -R_o / K_i$. Należy pamiętać, że ujemna rezystancja zastosowana samodzielnie prowadzi do niestabilności układu (wobec ujemnych wartości rezystancji bieguny układu znajdują się w prawej półpłaszczyźnie). Z tego względu stosuje się ją zwykle w specjalnych połączeniach z innymi elementami obwodowymi zapewniającymi stabilne działanie układu.

Konwerter ujemno-impedancyjny jest łatwo realizowalny w technologii scalonej przy wykorzystaniu tranzystorów lub wzmacniaczy operacyjnych. Z tego względu jest chętnie wykorzystywany w elektronice przy realizacji filtrów, generatorów i innych układów przetwarzania sygnałów.

18.3 Idealny wzmacniacz napięciowy

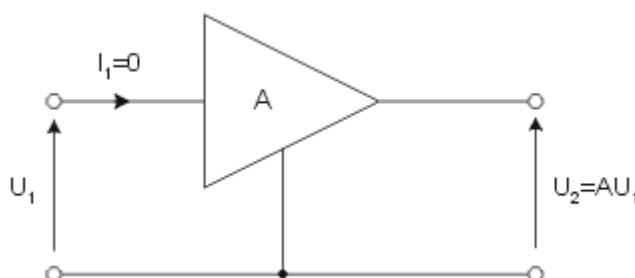
Idealny wzmacniacz napięcia jest czwórnikiem opisanym następującą macierzą hybrydową

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (18.10)$$

Jak wynika z powyższej zależności idealny wzmacniacz napięciowy nie pobiera prądu (impedancja wejściowa równa nieskończoności) a przetwarza jedynie napięcie wejściowe w wyjściowe zgodnie z relacją

$$U_2 = AU_1 \quad (18.11)$$

Oznaczenie techniczne wzmacniacza i odpowiadający mu schemat obwodowy reprezentujący równanie (18.10) przedstawia rys. 18.5.

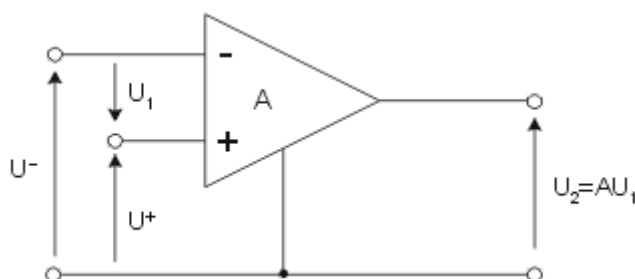


Rys. 18.5. Oznaczenie wzmacniacza napięciowego o skończonym wzmocnieniu A

Wejście układu stanowi przerwę (impedancja wejściowa równa nieskończoności). Na wyjściu istnieje jedynie idealne źródło napięcia sterowane napięciem. Stąd impedancja wyjściowa takiego układu jest równa zero.

18.4 Idealny wzmacniacz operacyjny

Wzmacniacz operacyjny jest szczególnym rodzajem wzmacniacza napięciowego niezwykle ważnym i często stosowanym przy realizacji innych układów. Jego oznaczenie oraz zastępczy schemat obwodowy przedstawia rys. 18.6.



Rys. 18.6. Oznaczenie idealnego wzmacniacza operacyjnego



Idealny wzmacniacz operacyjny nie pobiera prądu na wejściu (impedancja wejściowa równa nieskończoności) a jego napięcie wyjściowe jest proporcjonalne do wejściowego napięcia

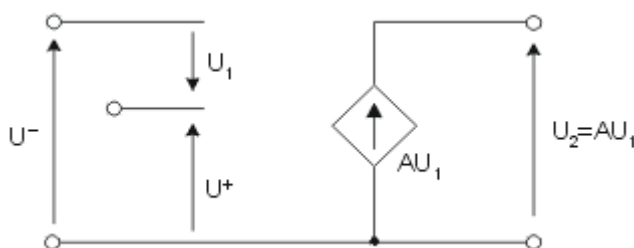
różnicowego $U_1 = U^+ - U^-$, przy czym U^+ jest napięciem wejścia nieodwracającego a U^- napięciem wejścia odwracającego wzmacniacza

$$U_2 = AU_1 \quad (18.12)$$

Przy założeniu idealności wzmacniacza operacyjnego wartość wzmocnienia A dąży do nieskończoności. Biorąc pod uwagę, że napięcie wyjściowe wzmacniacza może przyjmować jedynie wartości skończone, napięcie różnicowe U_1 w idealnym wzmacniaczu operacyjnym musi być równe zero. Idealny wzmacniacz operacyjny zachowuje się więc tak, jakby stanowił na wejściu jednocześnie zwarcie i rozwarcie. W efekcie idealny wzmacniacz operacyjny charakteryzuje się następującymi właściwościami:

- nieskończona wartość wzmocnienia napięciowego
- zerowa wartość impedancji wyjściowej
- nieskończona impedancja wejściowa
- spełnienie wszystkich powyższych cech dla zakresu częstotliwości od zera do nieskończoności.

Na rys. 18.7 przedstawiono obwodowy schemat zastępczy idealnego wzmacniacza operacyjnego, wykorzystujący źródło napięcia sterowane napięciem.



Rys. 18.7. Schemat zastępczy idealnego wzmacniacza operacyjnego

W rzeczywistości wzmacniacz operacyjny realizowany w technologii scalonej ma skończoną wartość zarówno impedancji wejściowej (rzędu megaomów) jak i wzmocnienia napięciowego. Co więcej wzmocnienie napięciowe jest w istotny sposób zależne od częstotliwości i zmienia się od wartości około miliona dla napięć stałych ($f=0$) do wartości równej jeden przy częstotliwości rzędu megaherców. Impedancja wyjściowa wzmacniacza rzeczywistego przyjmuje wartość około 70Ω zamiast wartości zerowej w przypadku

idealnym. Wartości powyższe mogą się zmieniać w zależności od technologii wykonania. W zakresie częstotliwości do 1kHz rzeczywisty wzmacniacz operacyjny z dużym przybliżeniem może być jednak traktowany jako idealny.

18.5 Wybrane zastosowania wzmacniaczy operacyjnych

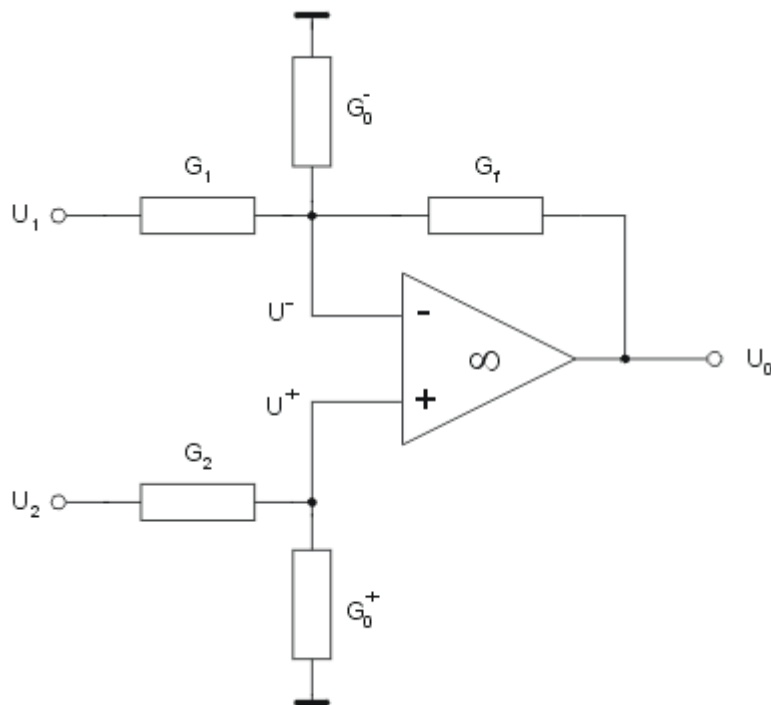
Wzmacniacz operacyjny dzięki swoim unikalnym cechom znalazł ogromne zastosowanie w technice elektronicznej. Tutaj ograniczymy się do wybranych zastosowań, w tym realizacji wzmacniacza sumacyjnego, układu całkującego, układu różniczkującego, przesuwnika fazowego, konwertera ujemno-impedancyjnego oraz żyratora.

18.5.1 Wzmacniacz sumacyjny

Wzmacniacz sumacyjny jest układem dokonującym sumowania napięć wejściowych z odpowiednią, zadaną wagą. Jeśli sygnały wejściowe oznaczmy jako U_i , to napięcie wyjściowe wzmacniacza sumacyjnego dane jest w postaci sumy ważonej

$$U_o = \sum_j k_j U_j \quad (18.13)$$

Wagi k_j oznaczają wzmocnienie (dodatnie lub ujemne) odpowiedniego sygnału U_j w układzie. Schemat układu sumującego sygnały wejściowe z dowolną wagą przy ograniczeniu się do jednego sygnału o wzmocnieniu ujemnym i jednego o wzmocnieniu dodatnim przedstawiono na rys. 18.8.



Rys. 18.8. Schemat sumatora dwu sygnałów

Wobec przyjętych oznaczeń elementów i napięć węzłowych z prądowego prawa Kirchhoffa napisanego dla dwu węzłów obwodu wynikają następujące równania

$$\begin{aligned} G_2(U_2 - U^+) &= G_0^+ U^+ \\ G_1(U_1 - U^-) &= G_0^- U^- + G_f(U^- - U_0) \end{aligned} \quad (18.14)$$

Ze względu na nieskończoną wartość wzmocnienia wzmacniacza operacyjnego napięcie w obu punktach sumacyjnych wzmacniacza jest sobie równe, to znaczy

$$U^+ = U^- \quad (18.15)$$

Z rozwiązania tego układu równań wynika

$$U^+ = \frac{G_2}{G_0^+ + G_2} U_2 \quad (18.16)$$

oraz

$$U_0 = \frac{G_2}{G_f} \frac{G_0^- + G_1 + G_f}{G_0^+ + G_2} U_2 - \frac{G_1}{G_f} U_1 \quad (18.17)$$

Przy dwu sygnałach wejściowych sygnał wyjściowy wzmacniacza sumacyjnego jest więc równy sumie ważonej sygnałów wejściowych

$$U_0 = k_1 U_1 + k_2 U_2 \quad (18.18)$$

przy czym współczynniki wzmocnień obu torów

$$k_1 = -\frac{G_1}{G_f} \quad (18.19)$$

$$k_2 = \frac{G_2}{G_f} \frac{G_0^- + G_1 + G_f}{G_0^+ + G_2} \quad (18.20)$$

są przeciwnego znaku. Przedstawiona powyżej struktura wzmacniacza pozwala więc zrealizować dowolne wzmocnienie, zarówno dodatnie jak i ujemne. Zauważmy, że jeśli przyjmiemy zrównoważony układ rezystorów, spełniający warunek równości sumy konduktancji włączonych w obu węzłach sumacyjnych

$$G_0^- + G_1 + G_f = G_0^+ + G_2 \quad (18.21)$$

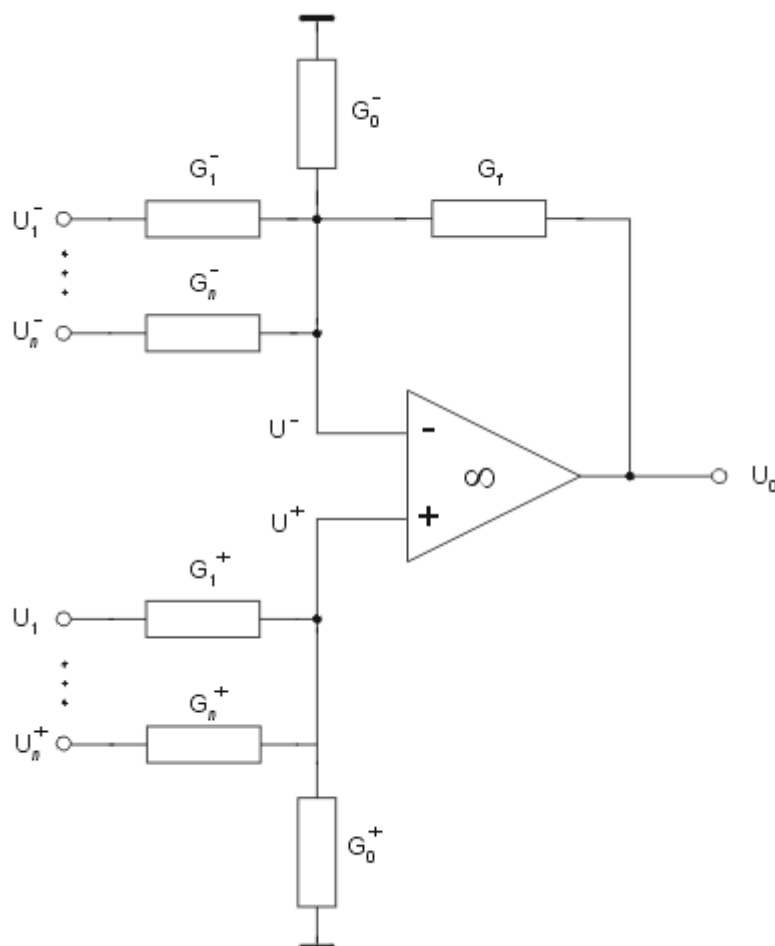
to wyrażenie na wzmocnienie k_2 upraszcza się do postaci analogicznej jak wzmocnienie k_1 , czyli

$$k_2 = \frac{G_2}{G_f} \quad (18.22)$$

Przy spełnieniu warunku zrównoważenia konduktancji w węzłach sumacyjnych oba wzmocnienia (dodatnie i ujemne) są określone jako stosunek odpowiedniej dla danego toru konduktancji wejściowej do konduktancji sprzężenia zwrotnego G_f . Reguła doboru

rezystorów dla uzyskania odpowiedniego wzmocnienia jest więc bardzo prosta, a poszczególne tory nie wpływają na siebie.

Co więcej przedstawiony tu układ wzmacniacza sumacyjnego łatwo jest uogólnić na sumator o dowolnej liczbie wejść i wyjść przez dodanie następnych kanałów.



Rys. 18.9. Schemat sumatora wielowejsiowego o wzmocnieniach dodatnich i ujemnych

Na rys. 18.9 przedstawiono schemat sumatora o wielu wejściach odwracających realizujących wzmocnienia ujemne i nieodwracających realizujących wzmocnienia dodatnie pozwalających uzyskać dowolne, niezależne od siebie wartości wzmocnień w kanale przy spełnieniu warunku zrównoważenia konduktancji w węzłach dodatnim i ujemnym

$$G_0^- + G_f + \sum_{k=1}^{n^-} G_k^- = G_0^+ + \sum_{k=1}^{n^+} G_k^+ \quad (18.23)$$

Wzmocnienia w poszczególnych torach są wyrażone wzorami identycznymi do przypadku układu o dwu wejściach

$$k_i^- = -\frac{G_i^-}{G_f} \quad (18.24)$$

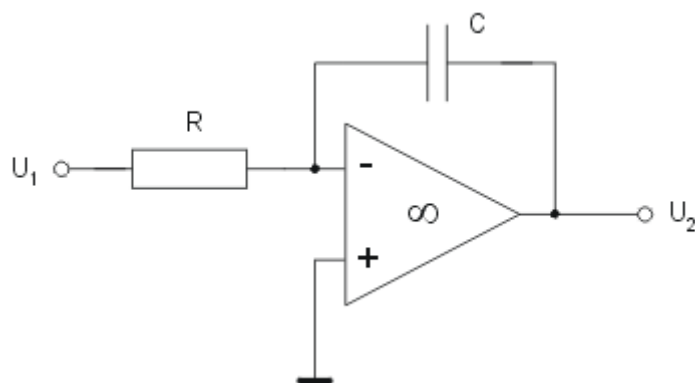
dla $i = 1, 2, \dots, n^-$ oraz

$$k_i^+ = \frac{G_i^+}{G_f} \quad (18.25)$$

dla $i = 1, 2, \dots, n^+$. Warunek zrównoważenia jest łatwy do spełnienia ze względu na wystąpienie nadmiarowych wartości konduktancji doziemnych G_0^+ oraz G_0^- .

18.5.2 Układ całkujący

Schemat układu realizującego operację całkowania z wykorzystaniem wzmacniacza operacyjnego jest przedstawiony na rys. 18.10.



Rys. 18.10. Schemat układu całkującego

Przyjmując wzmacniacz jako idealny i wykorzystując fakt, że wzmacniacz nie pobiera prądu a jego napięcie różnicowe jest równe zero otrzymuje się następujące równania opisujące układ

$$U_1 = RI \quad (18.26)$$

$$U_2 = -\frac{1}{sC}I \quad (18.27)$$

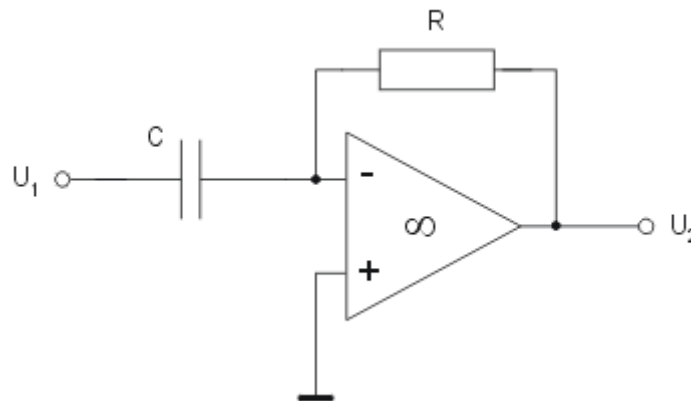
Z przekształcenia tych równań wynika wzór na transmitancję napięciową

$$T(s) = \frac{U_2}{U_1} = -\frac{1}{sRC} \quad (18.28)$$

Z porównania wzoru z zależnością definicyjną układu całkującego $T(s) = k/s$ wynika, że obwód z rys. 18.10 realizuje człon całkujący ze współczynnikiem $k = -\frac{1}{RC}$. Wartość współczynnika k jest ujemna.

18.5.3 Układ różniczkujący

Schemat układu realizującego operację różniczkowania o transmitacji $T(s) = ks$ z wykorzystaniem wzmacniacza operacyjnego jest przedstawiony na rys. 18.11.



Rys. 18.11. Schemat układu różniczkującego

Podobnie jak w przypadku poprzednim przyjmujemy wzmacniacz jako idealny. Uwzględniając to otrzymuje się następujące równania opisujące układ.

$$U_1 = \frac{1}{sC}I \quad (18.29)$$

$$U_2 = -RI \quad (18.30)$$

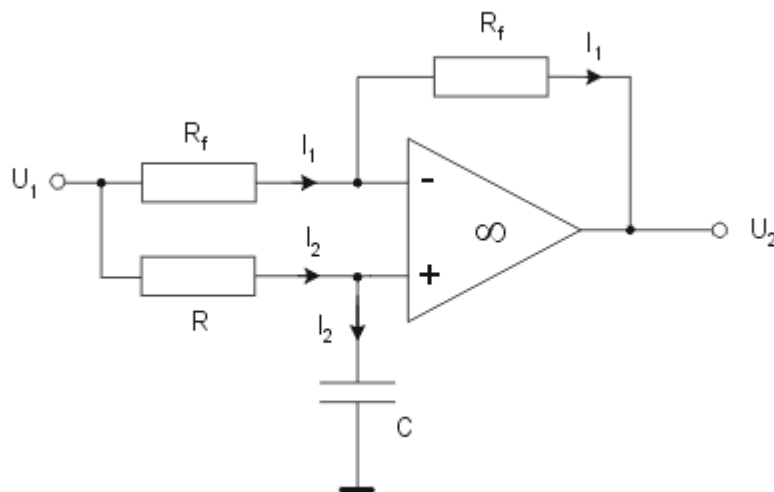
Z przekształcenia tych równań wynika wzór na transmitancję napięciową układu

$$T(s) = \frac{U_2}{U_1} = -sRC \quad (18.31)$$

Z porównania transmitacji z zależnością definicyjną $T(s) = ks$ wynika, że obwód z rys. 18.11 realizuje człon różniczkujący ze współczynnikiem $k = -RC$. Wartość współczynnika jest ustalana poprzez dobór rezystancji i pojemności układu.

18.5.4 Układ przesuwnika fazowego

Schemat układu przesuwnika fazowego przedstawiony jest na rys. 18.12.



Rys. 18.12. Schemat przesuwnika fazowego

Po uwzględnieniu idealności wzmacniacza otrzymuje się następujące równania opisujące obwód

$$U_1 = \left(R + \frac{1}{sC} \right) I_2 \quad (18.32)$$

$$U_1 = 2R_f I_1 + U_2 \quad (18.33)$$

$$U_2 = -R_f I_1 + \frac{1}{sC} I_2 \quad (18.34)$$

Z pierwszego i drugiego równania wynika

$$I_2 = \frac{U_1}{R + 1/sC} \quad (18.35)$$

$$I_1 = \frac{U_1 - U_2}{2R_f} \quad (18.36)$$

Po podstawieniu tych wielkości do wzoru trzeciego opisującego napięcie wyjściowe otrzymuje się

$$U_2 = -R_f \frac{U_1 - U_2}{2R_f} + \frac{1}{sC} \frac{U_1}{R + 1/sC} = \frac{-s + 1/RC}{s + 1/RC} U_1 \quad (18.37)$$

Transmitancja napięciowa układu wynikająca z powyższego wzoru jest więc następująca

$$T(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{-s + 1/RC}{s + 1/RC} \quad (18.38)$$

Z porównania tego wyniku z ogólną postacią transmitancji przesuwника fazowego

$$T(s) = \frac{-s + a}{s + a} \quad (18.39)$$

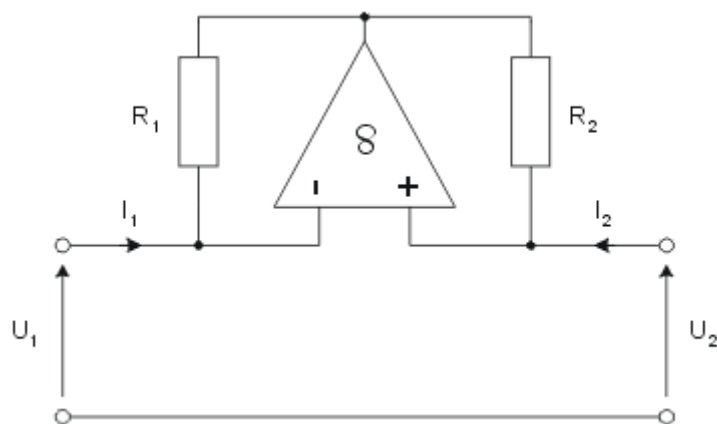
wynika, że układ z rys. 18.12 realizuje przesuwnik fazowy z wartością parametru a określoną wyrażeniem

$$a = 1/RC \quad (18.40)$$

Sterując wartością rezystancji R lub pojemnością C możemy zatem kształtować charakterystykę fazową przesuwnika i kąt przesunięcia między napięciem wejściowym i wyjściowym.

18.5.5 Konwerter ujemno-impedancyjny (NIC)

Schemat obwodu przedstawiającego realizację konwertera ujemno-impedancyjnego prądu przedstawiony jest na rys. 18.13.



Rys. 18.13. Schemat układu INIC

Po uwzględnieniu idealności wzmacniacza operacyjnego z równań Kirchhoffa wynikają następujące związki

$$U_1 = U_2 \quad (18.41)$$

$$R_1 I_1 = R_2 I_2 \quad (18.42)$$

Można je zapisać w formie równania łańcuchowego czwórnika

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{R_2}{R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (18.43)$$

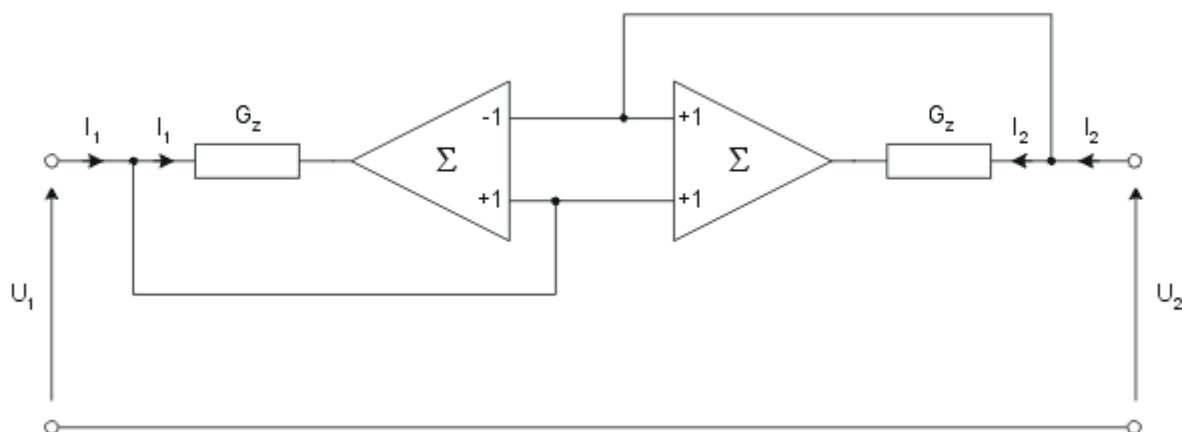
odpowiadającego dokładnie opisowi konwertera ujemno-impedancyjnego prądu ze stałą konwersji

$$K_i = \frac{R_2}{R_1} \quad (18.44)$$

Ustalenie wartości tej stałej odbywa się poprzez odpowiedni dobór rezystancji występujących w układzie.

18.5.6 Żyrator

Żyrator jest wyjątkowo ważnym elementem obwodu, stosowanym powszechnie w elektronice. Spośród wielu istniejących realizacji obwodowych pokażemy jedną, łatwą w praktycznej implementacji stosującą wzmacniacze sumacyjne napięciowe o skończonych wzmocnieniach równych ± 1 . Schemat obwodowy żyratora przedstawia rys. 18.14.



Rys. 18.14. Układ realizacji żyratora wykorzystujący wzmacniacze sumacyjne

Przy założeniu idealności wzmacniaczy (impedancja wejściowa nieskończona, impedancja wyjściowa zerowa) prądy wejściowy i wyjściowy układu opisują relacje

$$I_1 = G_z [U_1 - (U_1 - U_2)] = G_z U_2 \quad (18.45)$$

$$I_2 = G_z [U_2 - (U_2 + U_1)] = -G_z U_1 \quad (18.46)$$

Równanie admitancyjne układu dane jest więc w postaci

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G_z \\ -G_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (18.47)$$

z której wynika, że konduktancja żyracji jest równa konduktancji G_z występującej w układzie.

18.6 Analiza układów ze wzmacniaczami operacyjnymi metodą grafów przepływu sygnałów Masona

Efektywna analiza układów elektronicznych zawierających wzmacniacze operacyjne przy bezpośrednim użyciu praw Kirchhoffa jest możliwa jedynie dla obwodów zawierających małą liczbę wzmacniaczy. Przy analizie dużych układów o wielu wzmacniaczach operacyjnych najbardziej efektywne pozostaje zastosowanie metody grafów przepływowych Masona.

18.6.1 Podstawowe pojęcia grafów Masona

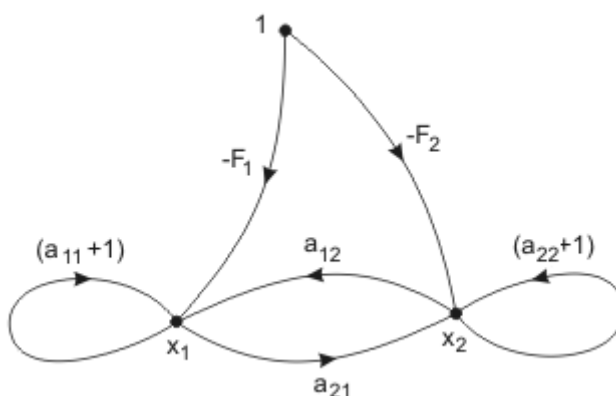
Graf Masona jest graficznym odzwierciedleniem układu równań liniowych i odpowiada przepływowi sygnałów w obwodzie elektrycznym. Wyróżnić w nim można węzły, odpowiadające zmiennym występującym w równaniu oraz gałęzie opisane wagami, odpowiadające współczynnikom równań. Przykładowo, jeśli dany jest układ równań liniowych

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= F_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= F_2\end{aligned}\tag{18.48}$$

to w pierwszej kolejności należy go przekształcić do postaci

$$\begin{aligned}x_1 &= (a_{11} + 1)x_1 + a_{12}x_2 - F_1 \\x_2 &= a_{21}x_1 + (a_{22} + 1)x_2 - F_2\end{aligned}\tag{18.49}$$

Graf Masona odpowiadający powyższemu układowi równań przedstawiony jest na rys. 18.15



Rys. 18.15. Graf Masona odpowiadający układowi równań liniowych (18.49)

Każdemu węzłowi grafu odpowiada zmienna x_i ($i = 1, 2$ w przykładzie) lub wymuszenie jednostkowe. Węzły połączone są gałęziami, którym przyporządkowane są współczynniki przy poszczególnych zmiennych układu równań (18.49). Współczynniki te, zwane wzmocnieniami (transmitancjami) gałęzi stanowią wagi, z jakimi sumowane są zmienne w poszczególnych węzłach. Sygnał węzła (zmienna x_i) jest równy sumie wagowej sygnałów dopływających do danego węzła. W grafie można wyróżnić pętle składające się z gałęzi jednakowo skierowanych tworzących zamknięty cykl (bez powtórzeń gałęzi i węzłów). W szczególności pętlę może tworzyć jedna gałąź wychodząca i wchodząca do tego samego węzła. Transmitancja pętli jest równa iloczynowi wzmocnień (transmitancji) gałęzi tworzących pętlę.

Jedną z najważniejszych zalet grafów Masona jest prosta reguła topologiczna określająca dowolny sygnał w grafie. Reguła ta dotyczy transmitancji definiowanej jako stosunek sygnału dowolnego węzła grafu uznanego za wyjściowy do sygnału węzła źródłowego, czyli węzła z którego sygnały jedynie odpływają (w przykładzie takim węzłem jest węzeł o sygnale równym jeden). Oznaczmy tę transmitancję przez $T = \frac{x_{wy}}{x_{we}}$. Zgodnie z regułą Masona transmitancję tę określa wzór

$$T = \frac{\sum_k T_k \Delta_k}{\Delta} \quad (18.50)$$

W powyższym wyrażeniu Δ oznacza wyznacznik główny grafu określany zgodnie ze wzorem

$$\Delta = 1 - \sum_i G_i + \sum_{i,j} G_i G_j - \sum_{i,j,k} G_i G_j G_k + \dots \quad (18.51)$$

We wzorze tym pierwsza suma oznacza sumowanie po wszystkich transmitancjach pętli G_i istniejących w grafie. Suma druga dotyczy iloczynów transmitancji pętli rozłącznych branych po dwie naraz. Suma trzecia dotyczy iloczynów transmitancji pętli rozłącznych branych po trzy. Rozwinięcie wyznacznika prowadzi się aż do wyczerpania wszystkich możliwych kombinacji wielokrotnych pętli rozłącznych, biorąc sumy na przemian ze znakiem plus i minus, jak to pokazano we wzorze (18.51).

Wyrażenie $\sum_k T_k \Delta_k$ w liczniku transmitancji dotyczy sumowania po wszystkich drogach prowadzących od węzła źródłowego (wejściowego) do węzła wyjściowego, przy czym T_k oznacza iloczyn wzmocnień gałęzi prowadzących od źródła do węzła wyjściowego a Δ_k jest wyznacznikiem Δ określonym dla tej części grafu (podgrafu), która jest rozłączna z k -tą drogą T_k (przy braku pętli w podgrafie wyznacznik Δ jest tożsamościowo równy 1).

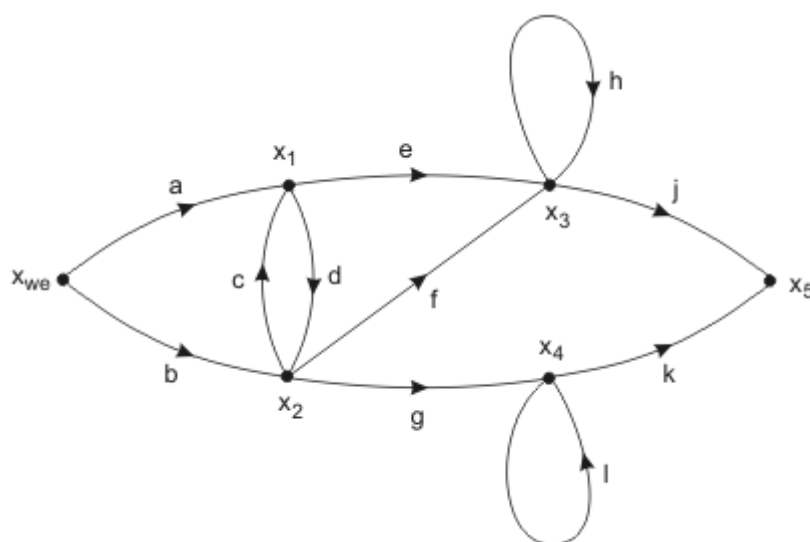
Z rozwiązania grafu z rys. 18.15 przy pomocy reguły Masona otrzymuje się następujące transmitancje (węzeł źródłowy jest skojarzony z sygnałem jednostkowym):

$$T_1 = x_1 = \frac{F_1 a_{22} - F_2 a_{12}}{1 - [(a_{11} + 1) + (a_{22} + 1) + a_{12} a_{21}] + (a_{11} + 1)(a_{22} + 1)}$$

$$T_2 = x_2 = \frac{-F_1 a_{21} - F_2 a_{11}}{1 - [(a_{11} + 1) + (a_{22} + 1) + a_{12} a_{21}] + (a_{11} + 1)(a_{22} + 1)}$$

Rozwiązania na wartości zmiennych x_1 i x_2 układu równań (18.48) uzyskano bezpośrednio na podstawie reguły topologicznej Masona zastosowanej względem grafu z rys. 18.15. W identyczny sposób można wyznaczyć rozwiązanie dowolnie złożonego systemu opisanego poprzez graf Masona.

Jako następny przykład rozpatrzmy graf przepływu sygnałów przedstawiony na rys. 18.16, o wzmocnieniach gałęzi opisanych literami $a, b, c, \dots l$.



Rys. 18.16. Graf przepływu sygnałów do przykładu

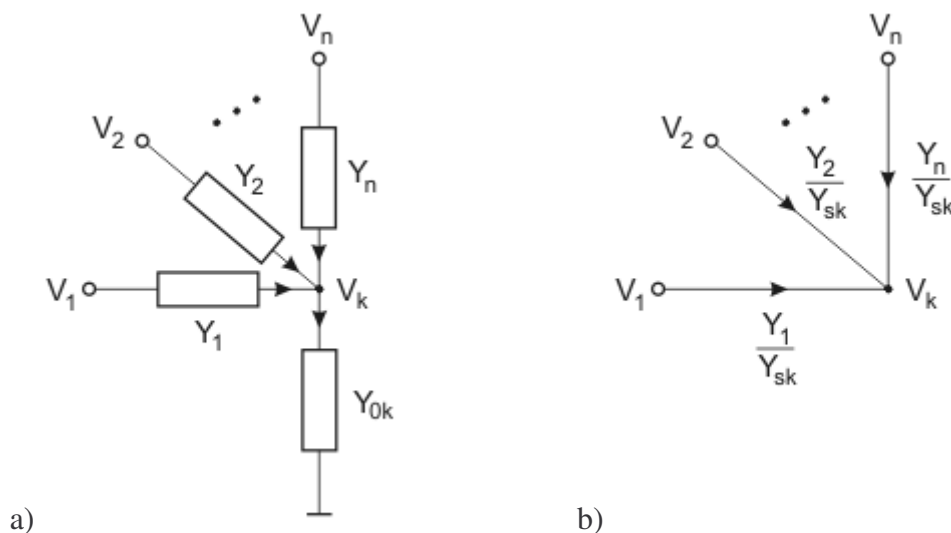
Stosując regułę Masona wyznaczmy transmitancję $T = \frac{x_5}{x_{we}}$. Bezpośrednio na podstawie analizy struktury grafu otrzymuje się

$$T = \frac{aej(1-l) + bgk(1-h) + adgk(1-h) + adfj(1-l) + bcej(1-l) + bff(1-l)}{1 - (cd + h + l) + (cdh + cdl + hl) - cdhl}$$

W transmitancji tej wyrażenie mianownika (wyznacznik główny Δ) zawiera trzy składniki związane z pętlami (suma wzmocnień wszystkich pętli, iloczynów wzmocnień pętli rozłącznych branych po dwa i pętli rozłącznych branych po trzy).

18.6.2 Zastosowanie grafu Masona w analizie obwodów ze wzmacniaczami

Graf Masona można narysować dla każdego obwodu, w szczególności obwodu zawierającego wzmacniacze napięciowe, bez konieczności wypisywania układu równań opisujących ten obwód. Aby stworzyć reguły automatycznego tworzenia grafu rozpatrzmy wybrane rodzaje połączeń elementów składowych obwodu. Na rys. 18.17a przedstawiono typowe połączenie elementów pasywnych w węźle k .



Rys. 18.17. Typowe połączenie elementów pasywnych w węźle (a) oraz graf Masona odpowiadający takiemu połączeniu (b)

Z prawa prądowego Kirchhoffa dla tego węzła wynika następujące równanie

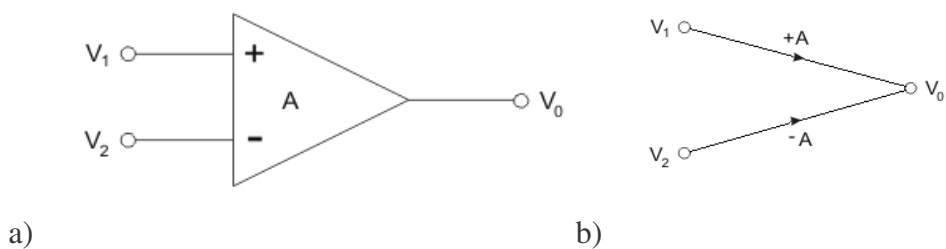
$$Y_1(V_1 - V_k) + Y_2(V_2 - V_k) + \dots + Y_n(V_n - V_k) = Y_{0k}V_k \quad (18.52)$$

Po prostych przekształceniach otrzymuje się

$$V_k = \frac{Y_1}{Y_{sk}}V_1 + \frac{Y_2}{Y_{sk}}V_2 + \dots + \frac{Y_n}{Y_{sk}}V_n \quad (18.53)$$

gdzie Y_{sk} jest sumą admitancji włączonych w węzle k -tym, $Y_{sk} = Y_{0k} + \sum_{i=1}^n Y_i$. Powyższemu równaniu odpowiada graf Masona przedstawiony na rys. 18.17b. Graf ten ma strukturę podobną do struktury obwodu, przy czym każdemu elementowi Y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) odpowiada wzmocnienie gałęzi grafu równe $\frac{Y_i}{Y_{sk}}$. Każda gałąź jest skierowana do węzła V_k , którego reprezentację graficzną w danej chwili tworzymy. Biorąc pod uwagę powyższe, graf odpowiadający węzłowi z rys. 18.17a może być utworzony automatycznie bez potrzeby pisania równań Kirchhoffa.

W przypadku obwodu zawierającego wzmacniacze napięciowe konieczne staje się podanie reguły tworzenia grafu odpowiadającego wzmacniaczowi. Na rys. 18.18a przedstawiony jest wzmacniacz napięciowy o dwu wejściach (inwersyjnym i nieinwersyjnym) o wzmocnieniu A w obu torach (w szczególności wzmocnienie A może dążyć do nieskończoności, jak to ma miejsce w idealnych wzmacniaczach operacyjnych).



Rys. 18.18. Model wzmacniacza napięciowego o dwu wejściach (a) i jego graf Masona (b)

Napięcie wyjściowe V_0 wzmacniacza opisuje wyrażenie

$$V_0 = AV_1 - AV_2$$

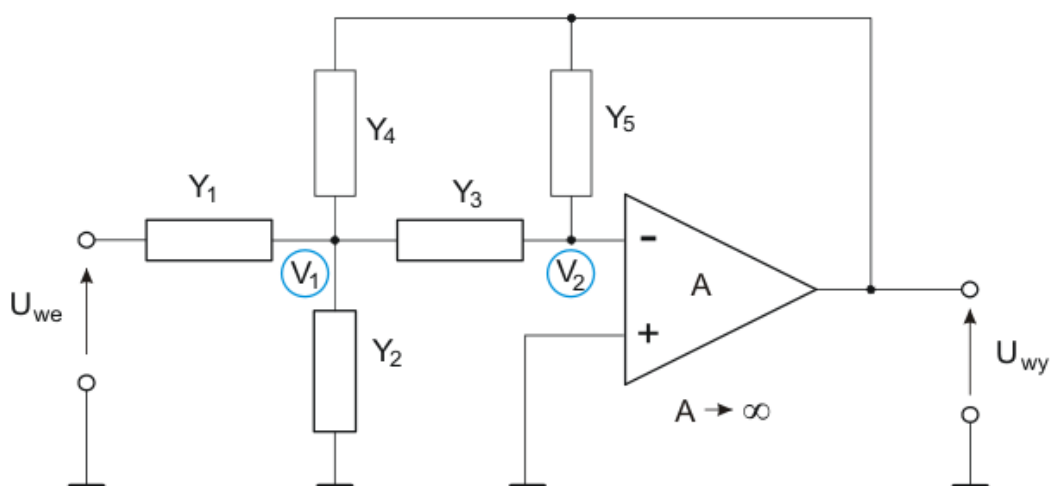
któremu można przyporządkować bezpośrednio graf Masona przedstawiony na rys. 18.18b.

Budując graf dla złożonego obwodu elektrycznego należy wyróżnić w nim węzły i związane z nimi potencjały węzłowe. Węzłem źródłowym (niezależnym) grafu jest źródło wymuszające istniejące w obwodzie, względem którego definiowana jest transmitancja T . Z tego węzła sygnały mogą jedynie odpływać. Budowę grafu rozpoczynamy od ułożenia wszystkich węzłów grafu w układzie podobnym do ich rozmieszczenia w obwodzie. Następnie budujemy oddzielnie reprezentację graficzną dla każdego węzła reprezentującego zmienną zależną korzystając bądź z reguły dotyczącej węzła z elementami pasywnymi (rys. 8.17) bądź węzła odpowiadającego wzmacniaczowi (rys. 18.18). Jeśli węzeł położony jest na wyjściu wzmacniacza jego reprezentacja graficzna odpowiada wzmacniaczowi, w przeciwnym wypadku węzłowi „pasywnemu”.

18.6.3 Przykłady zastosowania grafów w analizie obwodów

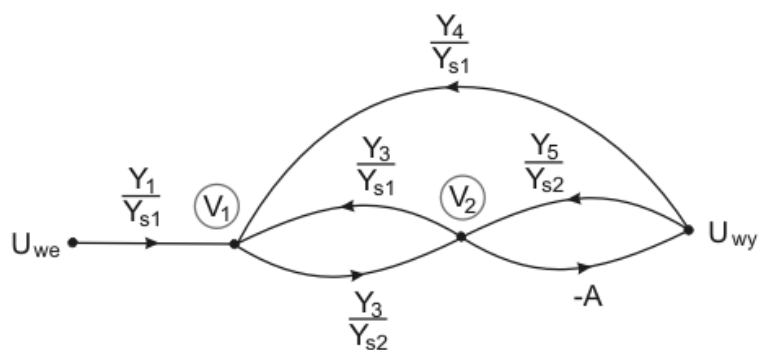
Przykład 18.1

Sposób automatycznego tworzenia grafu dla obwodu elektrycznego przedstawimy na przykładzie obwodu z rys. 18.19.



Rys. 18.19. Przykład obwodu ze wzmacniaczem operacyjnym

Obwód zawiera trzy węzły zależne (V_1 , V_2 i U_{wy}), w związku z tym należy zbudować reprezentację graficzną dla każdego z nich (V_1 i V_2 – węzły pasywne, U_{wy} – węzeł na wyjściu wzmacniacza). Na rys. 18.20 przedstawiono graf przepływu sygnałów odpowiadający obwodowi z rys. 18.19.



Rys. 18.20. Graf przepływu sygnałów odpowiadający obwodowi z rys. 18.19

Z reguły Masona zastosowanej do tego grafu wynika następujące rozwiązanie

$$T = \frac{U_{wy}}{U_{we}} = \frac{-A \frac{Y_3}{Y_{s2}} \frac{Y_1}{Y_{s1}}}{1 - \frac{Y_3^2}{Y_{s1}Y_{s2}} + A \frac{Y_5}{Y_{s2}} + A \frac{Y_4Y_3}{Y_{s1}Y_{s2}}}$$

gdzie $Y_{s1} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$, $Y_{s2} = Y_3 + Y_5$. Po uproszczeniu wzoru otrzymuje się ostateczną postać rozwiązania

$$T = \frac{U_{wy}}{U_{we}} = \frac{-AY_1Y_3}{Y_{s1}Y_{s2} - Y_3^2 + AY_5Y_{s1} + AY_3Y_4}$$

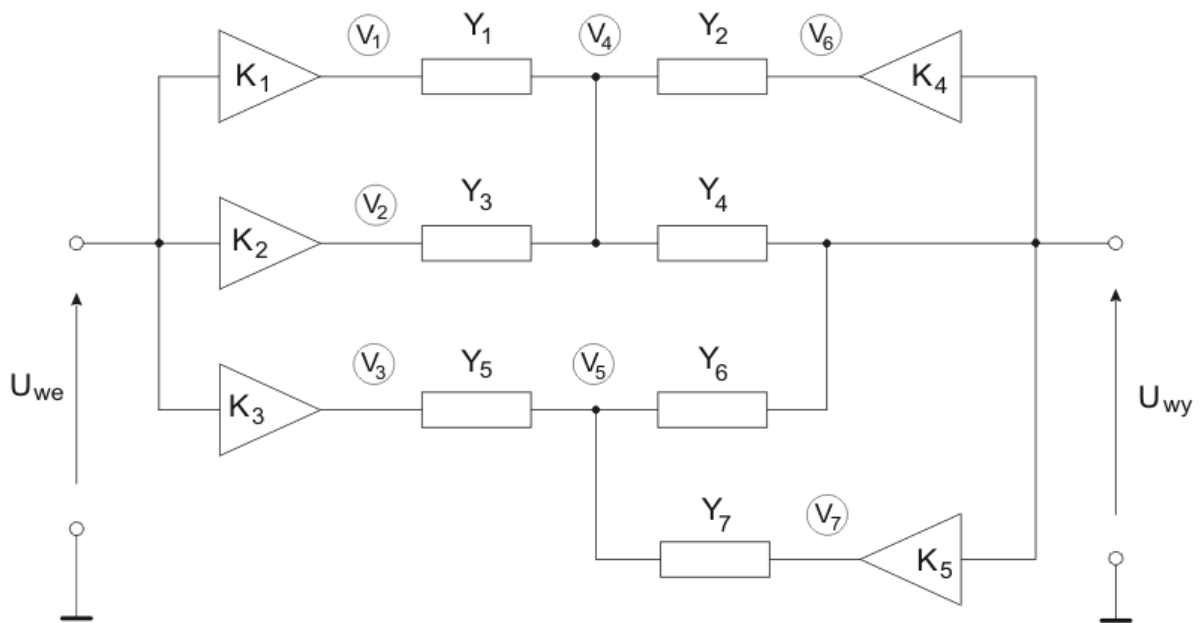
Przy potraktowaniu wzmacniacza jako idealnego o nieskończonym wzmacnieniu ($A \rightarrow \infty$) wzór powyższy upraszcza się do postaci

$$T_{\infty} = \frac{-Y_1Y_3}{Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_3Y_4}$$

stanowiącej często punkt wyjściowy przy projektowaniu filtrów elektrycznych.

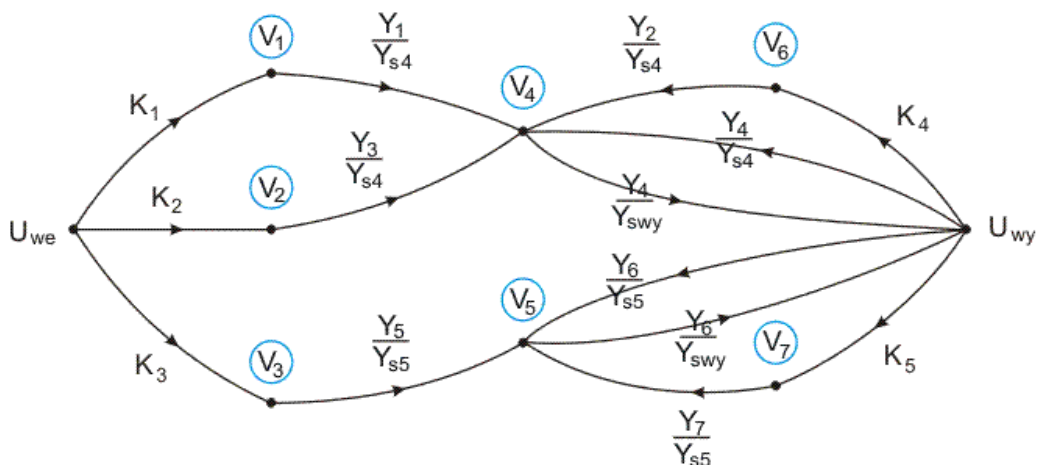
Przykład 18.2

Jako przykład rozpatrzmy obwód elektryczny RC z pięcioma wzmacniaczami napięciowymi o skończonych wzmocnieniach przedstawiony na rys. 18.21. Należy wyznaczyć transmitancję napięciową $T=U_{wy}/U_{we}$ tego obwodu stosując metodę grafów przepływowych Masona.



Rys. 18.21. Obwód elektryczny do przykładu 18.2

Graf przepływu sygnałów odpowiadający temu obwodowi, utworzony w sposób automatyczny zgodnie z regułami podanymi w punkcie poprzednim, przedstawiony jest na rys. 18.22.



Rys. 18.22. Graf przepływu sygnałów dla obwodu z rys. 18.21

Po zastosowaniu reguły Masona otrzymuje się następującą postać transmitancji napięciowej T obwodu.

$$T = \frac{K_1 \frac{Y_1}{Y_{s4}} \frac{Y_4}{Y_{swy}} + K_2 \frac{Y_3}{Y_{s4}} \frac{Y_4}{Y_{swy}} + K_3 \frac{Y_5}{Y_{s5}} \frac{Y_6}{Y_{swy}}}{1 - \frac{Y_6^2}{Y_{s5} Y_{swy}} - \frac{K_5 Y_6 Y_7}{Y_{s5} Y_{swy}} - \frac{Y_4^2}{Y_{s4} Y_{swy}} - \frac{K_4 Y_2 Y_4}{Y_{s4} Y_{swy}}}$$

gdzie $Y_{s4} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$, $Y_{s5} = Y_5 + Y_6 + Y_7$, $Y_{swy} = Y_4 + Y_6$. Po uproszczeniu wzoru otrzymuje się rozwiązanie zadania w postaci

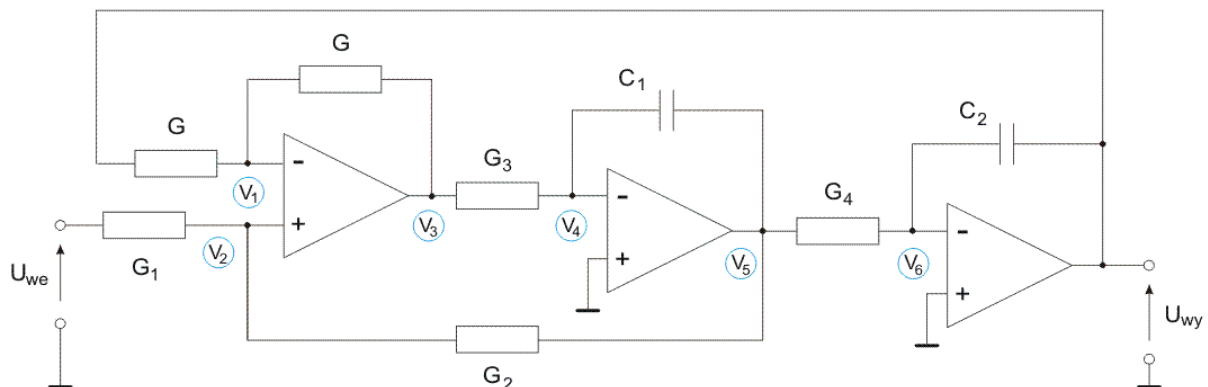
$$T = \frac{(K_1 Y_1 Y_4 + K_2 Y_3 Y_4) Y_{s5} + K_3 Y_5 Y_6 Y_{s4}}{Y_{s4} Y_{s5} Y_{swy} - Y_6^2 Y_{s4} - K_5 Y_6 Y_7 Y_{s4} - Y_4^2 Y_{s5} - K_4 Y_2 Y_4 Y_{s5}}$$

Podstawiając konkretne wartości na poszczególne admitancje obwodu otrzymuje się transmitancję operatorową obwodu $T=T(s)$.

Przykład 18.3

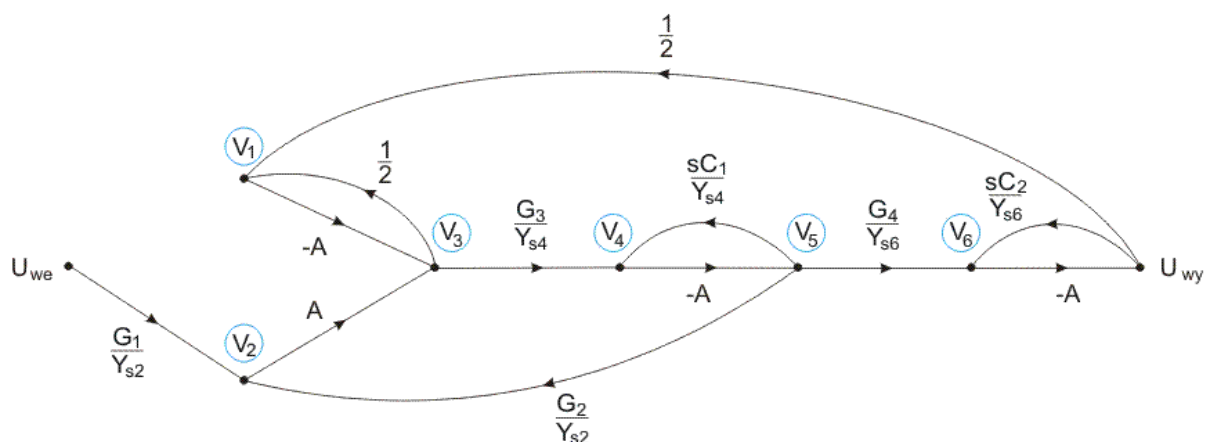
Jako następny przykład rozpatrzmy obwód RC z trzema wzmacniaczami operacyjnymi o wzmocnieniach A , przedstawiony na rys. 18.23, realizującymi funkcję transmitancji

napięciowej $T(s) = \frac{U_{wy}}{U_{we}}$.



Rys. 18.23. Struktura obwodu RC z trzema wzmacniaczami operacyjnymi

Graf Masona odpowiadający temu obwodowi przedstawiony jest na rys. 18.24. Zawiera on pięć pętli, wśród których występują pętle rozłączne po dwie i po trzy.



Rys. 18.24. Graf Masona odpowiadający obwodowi z rys. 18.23

Stosując regułę Masona otrzymuje się następującą postać transmitancji napięciowej.

$$T(s) = \frac{A^3 \frac{G_1}{Y_{s2}} \frac{G_3}{Y_{s4}} \frac{G_4}{Y_{s6}}}{M(s)}$$

gdzie mianownik transmitancji $M(s)$ dany jest wzorem

$$M(s) = 1 + \left(\frac{1}{2} A + \frac{AsC_1}{Y_{s4}} + \frac{AsC_2}{Y_{s6}} + \frac{A^2 G_2 G_3}{Y_{s2} Y_{s4}} + \frac{\frac{1}{2} A^3 G_3 G_4}{Y_{s4} Y_{s6}} \right) +$$

$$+ \left(\frac{\frac{1}{2} A^2 s C_1}{Y_{s4}} + \frac{\frac{1}{2} A^2 s C_2}{Y_{s6}} + \frac{A^2 s^2 C_1 C_2}{Y_{s2} Y_{s4}} + \frac{A^3 s G_2 G_3 C_2}{Y_{s2} Y_{s4} Y_{s6}} \right) + \frac{\frac{1}{2} A^3 s^2 C_1 C_2}{Y_{s2} Y_{s4} Y_{s6}}$$

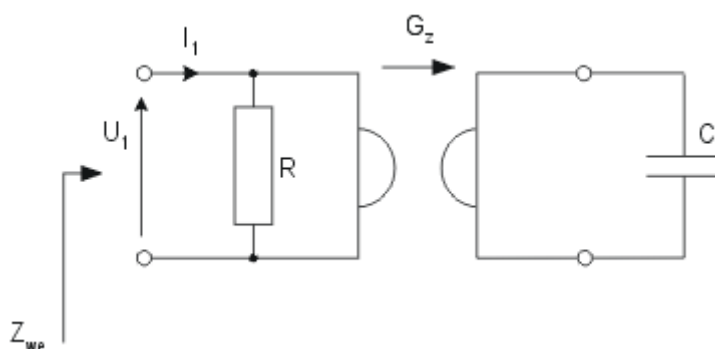
W praktyce przyjmuje się zwykle wzmacniacz operacyjny jako element idealny o wzmacnieniu $A \rightarrow \infty$. Przy takim założeniu transmitancja upraszcza się do postaci funkcji bikwadratowej typu dolnoprzepustowego

$$T(s) = \frac{G_1 G_3 G_4}{0,5 s^2 C_1 C_2 (G_1 + G_2) + s G_2 G_3 C_2 + 0,5 G_3 G_4 (G_1 + G_2)}$$

Zadania sprawdzające

Zadanie 18.1

Określić impedancję wejściową układu przedstawionego na rys. 18.25.

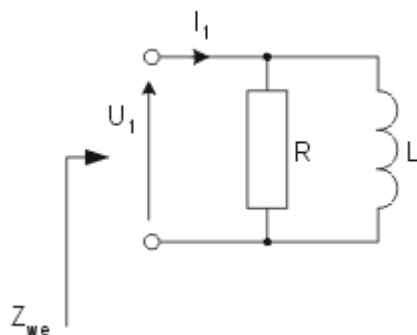


Rys. 18.25. Schemat układu do zadania 18.1.

Rozwiązanie

Układ żyratora obciążonego pojemnością realizuje sobą indukcyjność L , przy czym $L = R_z^2 C$.

Schemat układu po zastąpieniu żyratora i pojemności jedną indukcyjnością L przedstawiony jest na rys. 18.26.



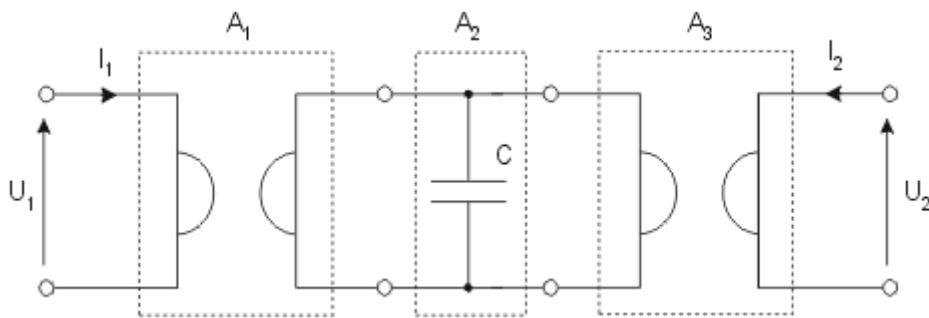
Rys. 18.26. Schemat układu zastępczego do rys. 18.15

Jest to układ połączenia równoległego rezystancji R i impedancji indukcyjnej $Z_L = sL$, wobec czego impedancja wejściowa całego układu jest równa

$$Z_{we} = \frac{R \cdot sL}{R + sL} = \frac{sR_z^2 RC}{sR_z^2 C + R}$$

Zadanie 18.2

Wyznaczyć macierz łańcuchową zastępczą układu przedstawionego na rys. 18.27



Rys. 18.27. Układ połączeń czwórników do zadania 18.2

Rozwiązanie

Układ przedstawiony na rysunku może być potraktowany jako połączenie łańcuchowe trzech czwórników, jak to przedstawiono na rys. 18.27. Dwa czwórniki są żyratorami o macierzy łańcuchowej

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & R_z \\ G_z & 0 \end{bmatrix}$$

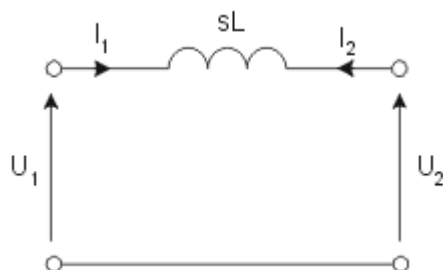
Trzeci czwórnik stanowi kondensator C . Macierz łańcuchowa tego czwórnika wyraża się wzorem

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ sC & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz łańcuchowa układu 3 czwórników połączonych kaskadowa wyraża się wzorem

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & R_z \\ G_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ sC & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & R_z \\ G_z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & sCR_z^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Łatwo można pokazać, że wynik końcowy odpowiada czwórnikowi o strukturze przedstawionej na rys. 18.28, z indukcyjnością nieuziemioną równą $L = CR_z^2$.



Rys. 18.28. Schemat zastępczy połączenia czwórników z rys. 18.17

Zadanie 18.3

Zrealizować układ sumatora trójwejściowego z wykorzystaniem wzmacniacza operacyjnego o wzmocnieniach równych $k_1 = -1$, $k_2 = -5$, $k_3 = 2$.

Rozwiązanie

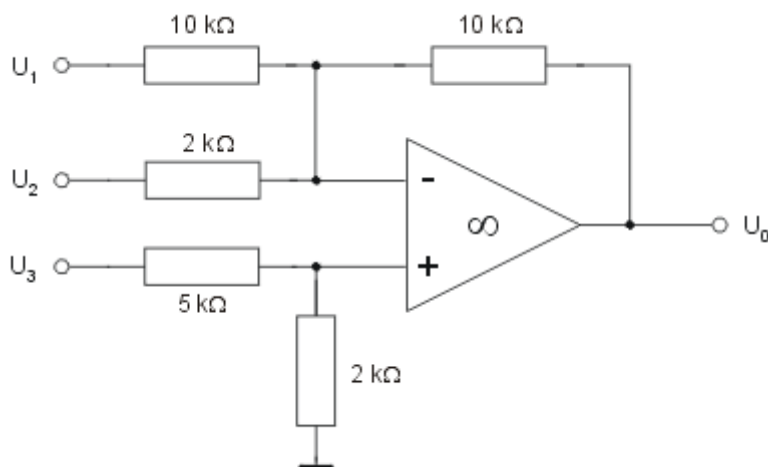
Wykorzystamy w realizacji schemat układu z rys. 18.9. Przyjmiemy arbitralnie wartość rezystancji R_f sprzężenia zwrotnego równą $R_f = 10\text{k}\Omega$, co odpowiada konduktancji $G_f = 10^{-4}\text{S}$. Dla uzyskania wzmocnienia $k_1 = -1$ należy przyjąć $G_1^- = 10^{-4}\text{S}$, co odpowiada $R_1^- = 10\text{k}\Omega$. Realizacja $k_2 = -5$ wymaga zastosowania $G_2^- = 5 \cdot 10^{-4}\text{S}$ ($R_2^- = 2\text{k}\Omega$). Uzyskanie $k_3 = 2$ jest możliwe przy wyborze $G_3^+ = 2 \cdot 10^{-4}\text{S}$ ($R_3^+ = 5\text{k}\Omega$). Warunek zrównoważenia konduktancji w obu węzłach wejściowych wzmacniacza wymaga, aby

$$G_0^- + G_f + G_1^- + G_2^- = G_0^+ + G_3^+$$

Podstawiając odpowiednie wartości otrzymuje się następującą postać warunku zrównoważenia konduktancji

$$G_0^- + 7 \cdot 10^{-4} = G_0^+ + 2 \cdot 10^{-4}$$

Przyjmując $G_0^- = 0$ (brak rezystora) oraz $G_0^+ = 5 \cdot 10^{-4} \text{ S}$ ($R_0^+ = 2 \text{ k}\Omega$) otrzymuje się schemat układu sumatora przedstawiony na rys. 18.29.



Rys. 18.29. Schemat sumatora trójwejściowego do zadania 18.3